Université Paris Descartes Année 18–19
UFR de Mathématiques et d'Informatique

Master 1

Analyse fonctionnelle

Contrôle du jeudi 22 novembre 2018 (durée 2 heures)

Exercice 1. Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $T(x) \in F$. Montrer que l'application $T : E \to F$ ainsi définie appartient à l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F.

Exercice 2. Soit $k \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$. On définit l'opérateur $K : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ en posant

$$Kf(t) = \int_0^1 k(t,s)\, f(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1], \forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Montrer que $\{Kf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinu.
2. Montrer que la suite $(Kf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérance dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|\infty)$.

Exercice 3. On se propose de montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ n'est pas un espace réflexif.

1. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer qu'il existe $\ell \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ tel que $\langle \ell, u\rangle = \lim_{n\to+\infty} u_n$, pour toute suite convergente u.
2. Montrer qu'il n'existe pas $v \in \ell^1(\mathbb{N})$ tel que $\langle \ell, u\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$, pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.
3. En déduire que l'injection canonique $\ell^1(\mathbb{N}) \to (\ell^1(\mathbb{N}))''$ est non surjective.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrice compact.

1. Pour tout $a \in X$, on définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} d_a : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x,a). \end{array}$$

   Montrer que si Y est une partie dense de X alors $\{d_a \ /\ a \in Y\}$ sépare les points.

2. En déduire que l'algèbre engendrée par $\{d_a \ /\ a \in Y\}$ et $(x \mapsto 1)$ est dense dans $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. En déduire que l'espace $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est séparable.

Théorème de Hahn-Banach. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E. Pour tout $\ell \in F'$, il existe $\tilde{\ell} \in E'$ tel que

$$\langle \tilde{\ell}, x \rangle = \langle \ell, x \rangle, \quad \forall x \in F, \qquad \text{et} \qquad \|\tilde{\ell}\|_{E'} = \|\ell\|_{F'}.$$