# M1 info : Bases du Traitement du Signal
# Examen final - Durée : 2h

13 janvier 2009

*Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.*

*Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie, sans signe distinctif. Les différentes parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.*

## 1 Questions de cours

### 1.1 Questions ouvertes (5 points)

*NB : Ces questions appellent des réponses à la fois courtes, précises et clairement justifiées.*

**a)** Qu'est-ce qu'un processus stationnaire ?

**b)** Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ apériodiques d'énergie finie. On note $\Gamma_{xy}(\tau)$ la corrélation entre $x$ et $y$. Si $\Gamma_{xy}(\tau)$ est maximal en $\tau = 1$ s, qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

**c)** Un convertisseur numérique-analogique doit généralement fonctionner en temps réel et de manière causale, c'est-à-dire que la sortie à un instant $t_0$ ne doit pas dépendre des échantillons postérieurs à $t_0$. La formule de reconstruction parfaite d'un signal analogique $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée est-elle utilisable dans ce cas ?

**d)** La synthèse d'un filtre RIF par la méthode du fenêtrage induit d'une part le phénomène de Gibbs (ondulations de la réponse fréquentielle) et d'autre part une bande de transition entre la bande passante et la bande atténuée. A quelles caractéristiques de la fenêtre utilisée ces deux phénomènes sont-ils respectivement liés ?

**e)** La méthode de l'échantillonnage fréquentiel permet de synthétiser des filtres RIF de longueur aussi petite que souhaité. Quel risque cette méthode présente-t-elle si la longueur choisie est trop faible ?

## 1.2 QCM (5,5 points)

*Pour chaque question, cochez toutes les affirmations justes (il peut ne pas y en avoir). Le barême est de 1 point (ou 0,5 pour les questions a1, a2 et a3) si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon.*

**a)** Chacune des 3 figures ci-dessous représente soit le spectre d'amplitude soit la densité spectrale de puissance d'un signal. Pour chacune, indiquer quelle peut être la nature du signal correspondant :

1. **☐ analogique - ☐ échantillonné- ☐ périodique- ☐ apériodique- ☐ déterministe- ☐ aléatoire**
2. **☐ analogique - ☐ échantillonné- ☐ périodique- ☐ apériodique- ☐ déterministe- ☐ aléatoire**
3. **☐ analogique - ☐ échantillonné- ☐ périodique- ☐ apériodique- ☐ déterministe- ☐ aléatoire**

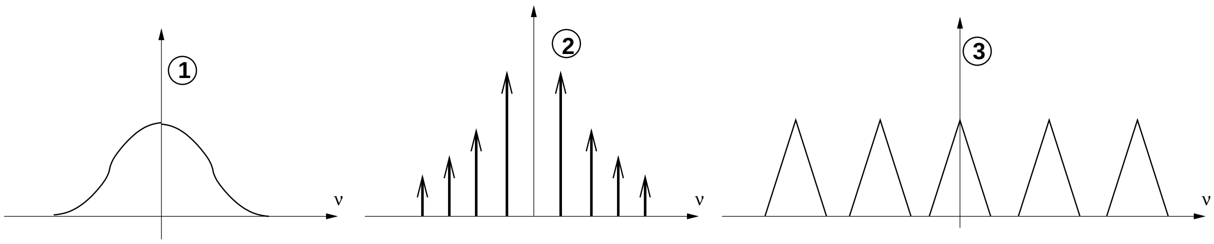


FIG. 1 –

**b)** La formule de Poisson

**☐ indique comment ne pas s'étouffer avec les arêtes.**
**☐ traduit la réplication du spectre lors de l'échantillonnage.**
**☐ permet d'énoncer le théorème de Shannon.**
**☐ n'est valable que si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal.**

**c)** Un filtre anti-repliement

**☐ est un filtre passe-bas.**
**☐ est un filtre passe-bande.**
**☐ permet de vérifier la condition de Shannon.**
**☐ permet de reconstruire le signal original (d'avant le filtrage) à partir du signal échantillonné même si la fréquence maximale du signal original est supérieure à deux fois la fréquence d'échantillonnage.**

**d)** La convolution circulaire de deux signaux discrets de longueur $N$ est équivalente

**☐ au produit de leurs transformées de Fourier discrètes.**
**☐ à leur convolution linéaire si chaque signal comporte $N/2$ zéros successifs.**
**☐ au produit de leurs transformées de Fourier à temps discret.**
**☐ à leur produit si chaque signal comporte $N/2$ zéros successifs .**

# 2 Exercices

## 2.1 Etude de filtres numériques (5,5 points)

**a)** Mettre en relation chaque diagramme Zi de pôles-zéros de la figure 3 avec une réponse fréquentielle Fj de la figure 4, **en justifiant vos choix.** Indiquez pour chaque filtre s'il est stable et pourquoi.

**b)** Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ correspondant au diagramme pôles-zéros Z2 sous la forme $\pi_i(z - z_i)/\pi_j(z - p_j)$, en considérant que le pôle représenté est un pôle triple. Mettez $H(z)$ sous la forme $H(z) = \sum_{i=1}^{3} a_i z^{-i}$. *La suite peut être faite sans connaître les valeurs des $a_i$.*

**c)** Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? (justifier)

**d)** Ecrivez l'équation aux différences du filtre et dessinez sa structure.

## 2.2 Sous-échantillonnage et interpolation (6 points)

**a)** Soit un signal discret $x(n)$ dont le spectre d'amplitude est représenté en fréquences normalisées sur la figure 2. On sous-échantillonne ce signal d'un facteur 2, c'est-à-dire qu'on prélève un échantillon sur 2 pour faire un signal $y(n)$ : $y(n) = x(2n)$. Montrer que :

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left(X\left(\frac{f}{2}\right) + X\left(\frac{f}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

*Conseil : partir du membre de gauche de l'égalité.*

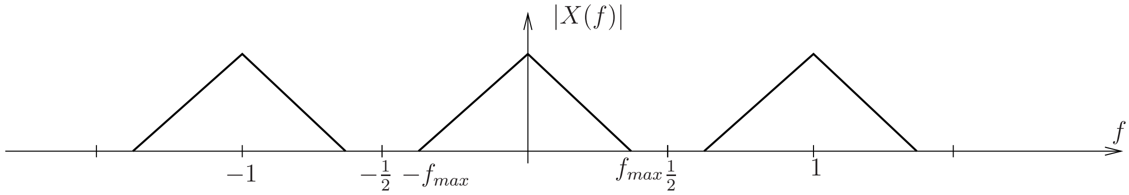


FIG. 2 – Spectre d'amplitude de $x(n)$.

**b)** Dessiner (de préférence sur la même figure avec des couleurs différentes) les spectres d'amplitude $|X(f/2)|$ et $|X(f/2 - 1/2)|$. *Attention, prenez votre temps, regardez bien pour plusieurs valeurs successives de $f$ quelles sont les valeurs de $|X(f/2)|$ et $|X(f/2 - 1/2)|$.* A quelle condition sur $f_{max}$ le signal sous-échantillonné $y(n)$ porte-t-il la même information que $x(n)$ ? Dessiner $|Y(f)|$ dans le cas limite.

**c)** On suppose que la condition précédente est vérifiée et on cherche à reconstruire $x$ à partir de $y$. La première étape de la reconstruction est de mettre $y$ au même rythme que $x$, en intercalant un zéro entre deux échantillons successifs de $y$. On obtient le signal $w$ :

$$w(n) = \begin{cases} y(n/2) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Montrer que $W(f) = Y(2f)$. Dessiner $|W(f)|$ dans le cas limite évoqué à la question *b*. Quel est le deuxième traitement à appliquer à $w$ pour retrouver $x$ ?

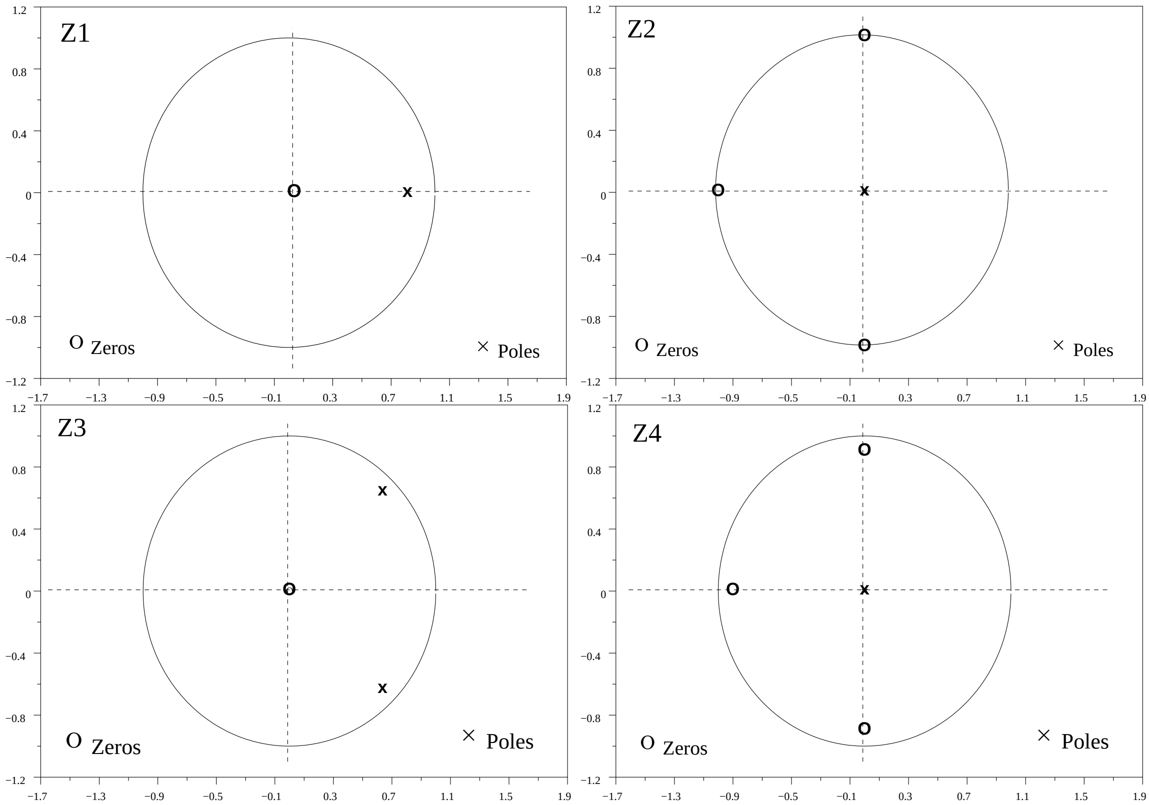


FIG. 3 – Diagrammes pôles-zéros

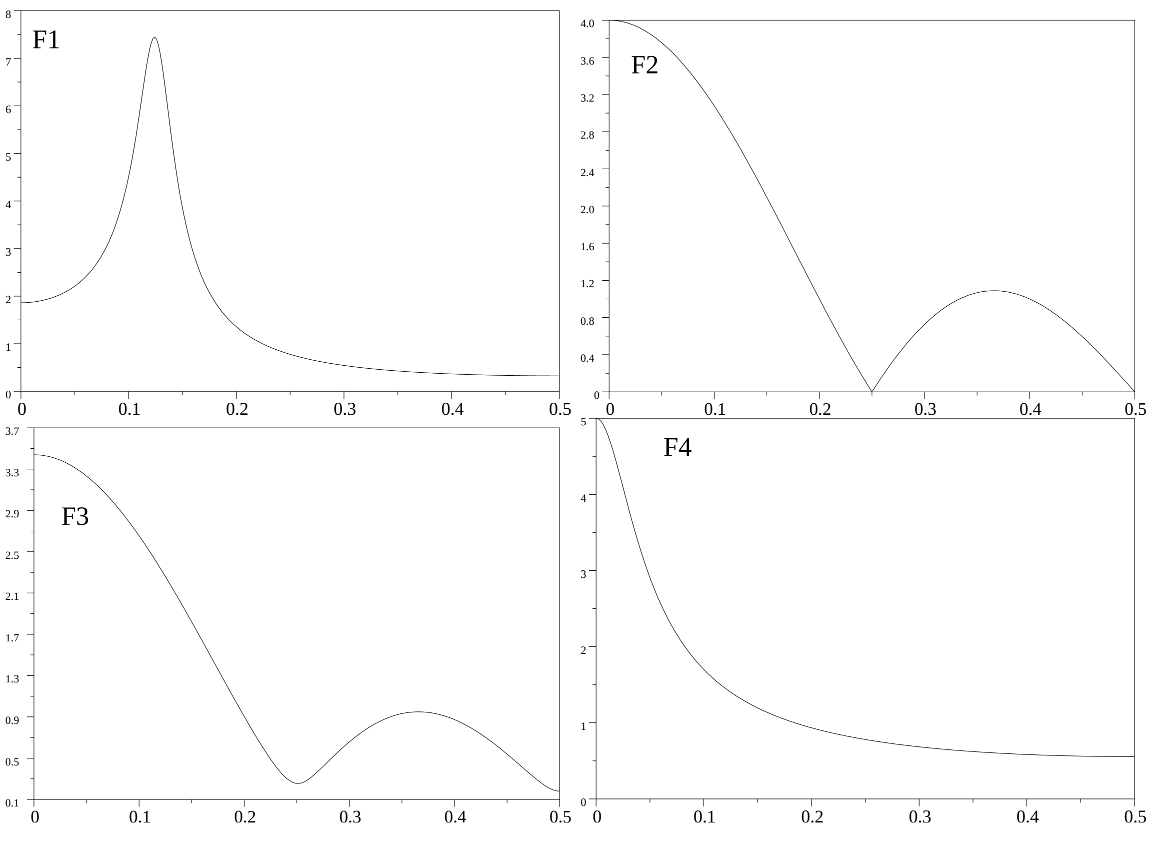


FIG. 4 – Réponses fréquentielles (fréquences normalisées positives)