M1 info : Bases du Traitement du Signal
Examen final - Durée : 2h

11 janvier 2007

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 QCM (4 points)

Pour chaque question, cochez toutes les affirmations justes. Le barême est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon.

1) la figure 1 représente trois signaux temporels continus ou discrets numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois spectres d'amplitude a, b et c (ligne du bas). Indiquez pour chaque signal temporel la lettre du spectre correspondant :

1 : ... **2 : ...** **3 : ...**

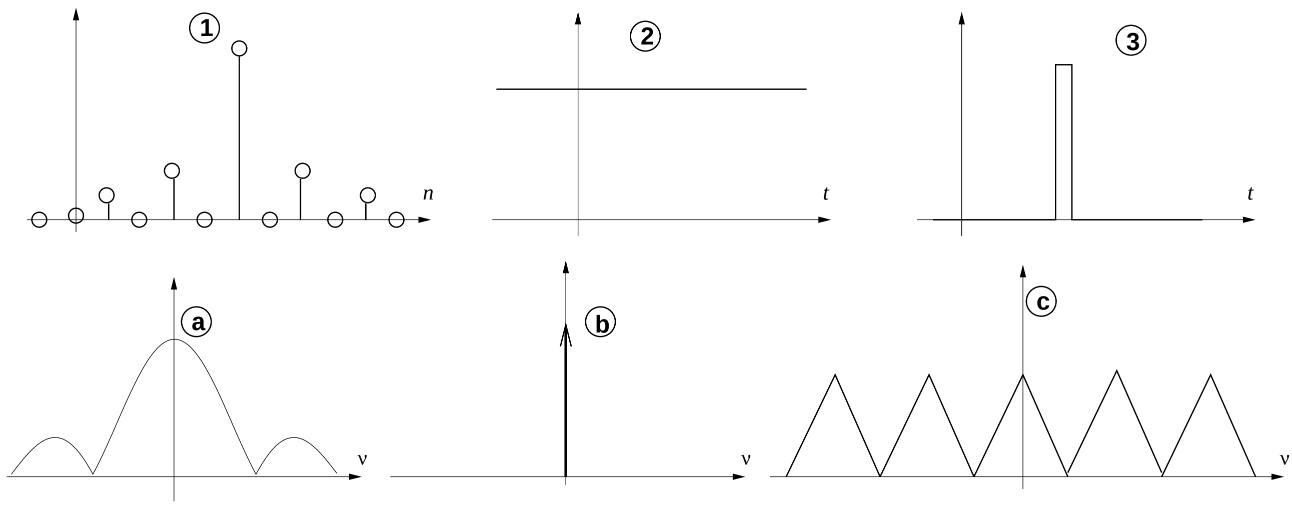

FIG. 1 –

2) La transformée en z, $X(z)$, d'un signal $x(n)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$ coïncident pour :

☐ $|z| = 1$ ☐ $|z| < 1$
☐ $z = e^{j2\pi f}$**, où f désigne la fréquence normalisée**

3) Un filtre causal :

☐ **est stable.**
☐ **est stationnaire.**
☐ **aura une sortie désespérément nulle jusqu'au 11 janvier 2007 à 16h07mn33s si le signal d'entrée est nul jusqu'à ce moment.**

4) La synthèse d'un filtre par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel sur N points d'une réponse fréquentielle $H(f)$

☐ **consiste à générer une réponse impulsionnelle de longueur N par une transformée de Fourier discrète inverse des N échantillons fréquentiels.**
☐ **génère un filtre RIF dont la réponse fréquentielle est exactement celle du modèle $H(f)$ aux points d'échantillonnage.**
☐ **présente l'avantage de générer un filtre RIF de réponse fréquentielle $H(f)$ avec une réponse impulsionnelle aussi courte qu'on le souhaite, en réglant la valeur de N.**

1.2 Questions ouvertes (4 points)

1) Les mécanismes de l'audition reposent largement sur une analyse spectrale des sons par l'oreille. Lorsqu'on entend un son pur (sinusoïde) d'une durée très brève, pourquoi a-t-on du mal à percevoir précisément sa hauteur (c'est-à-dire sa fréquence) ?

2) Expliquez en quoi le zéro-padding permet ou ne permet pas d'améliorer la résolution fréquentielle d'un analyse spectrale par TFD. On rappelle que la résolution fréquentielle est l'écart minimal observable entre deux raies fréquentielles.

3) Un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 1/4$ a pour réponse impulsionnelle $h(n) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(n\pi/2)$. Pourquoi ne peut-il être implémenté sous forme d'un filtre non-récursif ?

2 Exercices

Dans chaque exercice, les questions sont assez indépendantes. Ne restez donc pas bloqué trop longtemps sur une question difficile.

2.1 Tatouage audio par filtrage passe-tout (6 points)

Le tatouage audio consiste à insérer une information dans un son par une altération imperceptible du signal sonore. On s'intéresse ici au tatouage par filtrage passe-tout.

Un filtre passe-tout est un filtre qui ne modifie que le spectre de phase d'un signal (l'argument du spectre), sans altérer le spectre d'amplitude. Ainsi, le module de la réponse fréquentielle vaut 1 pour toutes les fréquences, d'où le nom de passe-tout. Cette propriété est particulièrement intéressante pour les signaux audio, puisque l'oreille est sensible aux modifications du spectre d'amplitude des signaux sonores mais peu sensible aux faibles variations de la phase.

On dispose de deux filtres passe-tout distincts H_0 et H_1. La méthode de tatouage consiste à découper le signal en blocs de N échantillons et à insérer 1 bit par bloc, en filtrant par H_0 pour insérer 0 ou par H_1 pour insérer 1, selon le schéma de la figure 2.

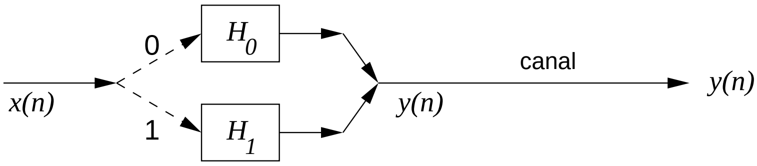

FIG. 2 – Tatouage par filtrage passe-tout.

La fonction de transfert des filtres utilisés est définie par :

$$H_i(z) = \frac{a_i^* + z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}}, \qquad i \in \{0, 1\}$$

avec a_0 et a_1 deux nombres complexes distincts de module strictement inférieur à 1 (l'étoile désigne l'opération de conjugaison d'un complexe). On peut montrer que $\forall f,\ |H_i(f)| = 1$.

1) Quels sont le pôle et le zéro de H_i ?

2) Donner l'équation aux différences liant l'entrée et la sortie d'un filtre H_i.

3) Les échantillons du signal audio ont des valeurs réelles et le signal de sortie du filtre doit naturellement être réel aussi. Quel peut être l'inconvénient des filtres H_0 et H_1 ? Montrer que l'on peut y remédier en mettant à la suite de chaque filtre H_i le filtre H'_i de fonction de transfert

$$H'_i(z) = \frac{a_i + z^{-1}}{1 + a_i^* z^{-1}}$$

4) On suppose ici que a_0 et a_1 sont réels, ce qui évite d'utiliser les filtres H'_i. Pour un bloc donné de y de longueur N, le destinataire du signal audio y souhaite détecter le bit inséré. Il ne connaît ni le signal original x ni le filtre H_i utilisé. En revanche il connaît les deux valeurs a_0 et a_1.

On calcule la transformée en Z du bloc reçu, $Y(z) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) z^{-n}$ pour $z \in \{-a_0; -1/a_0; -a_1; -1/a_1\}$. Si

$$\frac{Y(-a_0)}{Y(-1/a_0)} > \frac{Y(-a_1)}{Y(-1/a_1)}$$

alors on détecte 0, sinon on détecte 1. Expliquez pourquoi.

2.2 Analyse d'un filtre numérique (5 points)

Soit un filtre numérique dont le diagramme pôles-zéros est représenté sur la figure 3.

1) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ? (justifier vos réponses).

2) Donnez sa fonction de transfert et son équation aux différences.

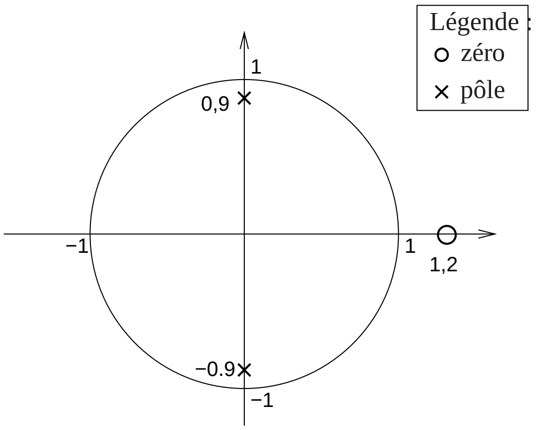

FIG. 3 – Diagramme pôles-zéros.

3) Dessinez l'allure du module de sa réponse fréquentielle.

2.3 Processus auto-régressif (3 points)

Un processus auto-régressif d'ordre p est caractérisé par une équation aux différences de la forme

$$x(n) = w(n) - \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)$$

On suppose ici que le signal $w(n)$ est un signal discret aléatoire de densité spectrale de puissance constante égale à 1 : $\gamma_w(f) = 1 \quad \forall f$.

Montrez que la densité spectrale de puissance de $x(n)$ peut s'écrire :

$$\gamma_x(f) = \left| \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{p} a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f i}} \right|^2$$

3 Annexe : rappel sur les complexes

Pour un nombre complexe $a = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$, on appelle conjugué de a le nombre noté a^* tel que $a = \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}$.

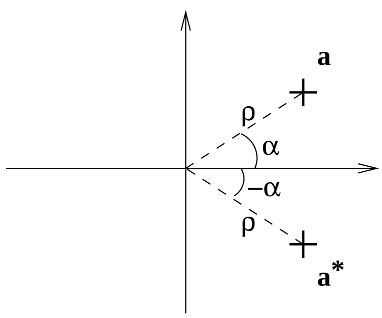

FIG. 4 – Conjugaison d'un nombre complexe.