M1 info : Bases du Traitement du Signal
Examen final - Durée : 2h

10 juin 2010

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les différentes parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie. Le premier feuillet est à rendre avec votre copie ***sans aucun signe distinctif***

1 Questions de cours

1.1 Questions ouvertes (4 points)

NB : Ces questions appellent des réponses à la fois courtes, précises et clairement justifiées. On ne vous demande pas de recopier des extraits du cours, mais de répondre exactement aux questions posées.

a) Pourquoi la fonction représentée sur la figure 1 ne peut-elle représenter l'autocorrélation d'un signal d'énergie finie ?

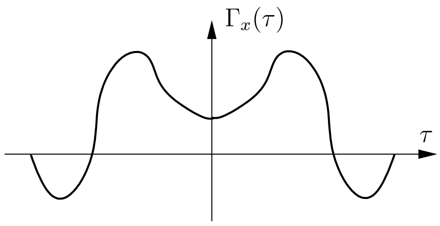

FIG. 1 –

b) Soit un signal aléatoire discret x dont la densité spectrale de puissance $\gamma_x(f)$ est représentée sur la figure 2 pour les fréquences normalisées $-3/2$ à $3/2$. Calculer la puissance de x.

c) Expliquez en quoi le zéro-padding permet ou ne permet pas d'améliorer la résolution fréquentielle d'une analyse spectrale par TFD. On rappelle que la résolution fréquentielle est l'écart minimal observable entre deux raies fréquentielles.

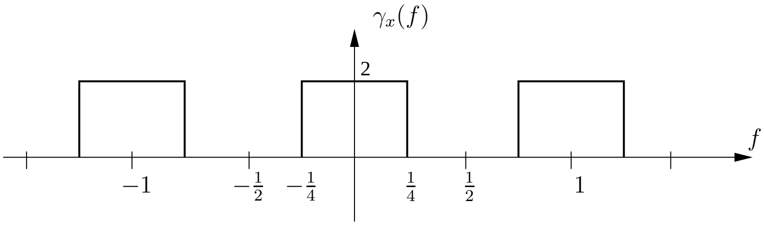

FIG. 2 – Densité spectrale de puissance de x.

d) La synthèse d'un filtre RIF passe-bas par la méthode du fenêtrage induit d'une part le phénomène de Gibbs (ondulations de la réponse fréquentielle) et d'autre part une bande de transition entre la bande passante et la bande atténuée. A quelles caractéristiques de la fenêtre utilisée ces deux phénomènes sont-ils respectivement liés ?

1.2 QCM (4 points)

Cochez toutes les affirmations exactes. N'oubliez pas de rendre ce QCM avec votre copie, ***sans aucun signe distinctif****.*

a) La formule de reconstruction d'un signal analogique $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée

☐ **est une approximation, car il n'est pas possible de retrouver exactement le signal analogique original.**
☐ **nécessite de disposer de tous les échantillons passés et futurs pour calculer une valeur $x(t)$ à un instant t donné.**
☐ **permet de reconstruire $x(t)$ au fur et à mesure qu'on reçoit les échantillons.**

b) Spectres...

☐ **Le spectre d'un signal discret est forcément discret.**
☐ **Un signal périodique possède un spectre périodique.**
☐ **Un signal discret a un spectre périodique de période égale à la fréquence d'échantillonnage.**
☐ **La transformée de Fourier discrète (TFD) est une discrétisation de la transformée de Fourier à temps discret (TFTD).**

c) Lorsqu'on analyse par transformée de Fourier discrète (TFD) le spectre d'une sinusoïde à partir d'un nombre fini d'échantillons, les raies spectrales subissent un élargissement

☐ **à cause de la limitation de la durée d'observation.**
☐ **qui serait moindre si l'on utilisait une transformée de Fourier à temps discret (TFTD) au lieu de la TFD.**
☐ **qui dépend du type de fenêtre de pondération.**

d) Un filtre à réponse impulsionnelle infinie

☐ **est causal s'il est stable.**
☐ **est toujours stationnaire.**
☐ **causal est stable ssi ses zéros sont de modules < 1.**
☐ **causal est stable ssi ses pôles sont de modules < 1.**

2 Exercices

2.1 Echantillonnage (5 points)

Soient les signaux

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi\nu_0 t)$$
$$y(t) = \nu_0\,\mathrm{sinc}(\pi\nu_0 t)$$

Les transformées de Fourier de ces signaux sont des fonctions réelles de la fréquence, représentées respectivement sur les figures 3 et 4.

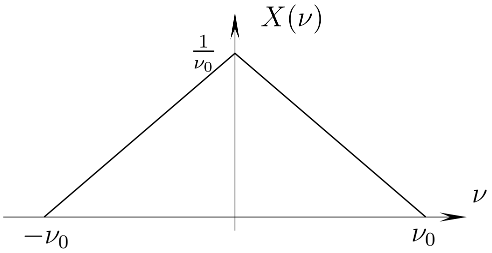

FIG. 3 – Spectre de $x(t)$.

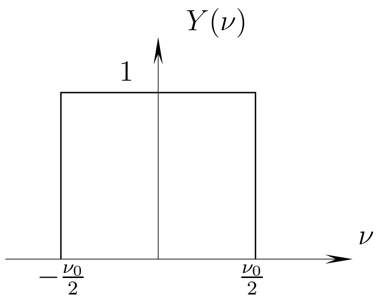

FIG. 4 – Spectre de $y(t)$.

a) On échantillonne $x(t)$ à une fréquence ν_e. Représenter le spectre du signal échantillonné, $X_e(\nu)$, pour $\nu_e = \nu_0$ et pour $\nu_e = 3\nu_0$. Commentez.

b) On cherche à reconstruire $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_e/2$. Donner l'expression du signal reconstruit $\tilde{x}(t)$ pour $\nu_e = \nu_0$ et pour $\nu_e = 3\nu_0$.

Source : Jean-Yves Tourneret, ENSEEIHT, janvier 2010

2.2 Filtrage numérique (4 points)

Soit un filtre numérique de réponse fréquentielle $H(f)$ représentée en module sur la figure 5, défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + x(n-8)$$

où x et y désignent respectivement l'entrée et la sortie du filtre.

a) Calculez la fonction de transfert $H(z)$. Quel est le nombre maximal de pôles ? de zéros ? En vous aidant de la figure 5, dessinez le diagramme pôles-zéros. Ce filtre est-il stable ?

b) Trouvez un signal somme de 4 sinusoïdes discrètes qui soit complètement éliminé par le filtre. Vous dessinerez son spectre d'amplitude et vous donnerez son expression temporelle.

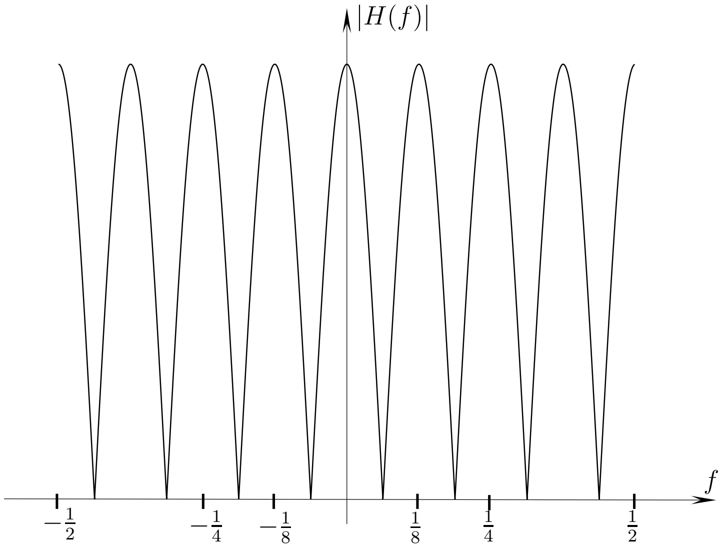

FIG. 5 – Réponse fréquentielle du filtre (en module).

2.3 Prédiction linéaire (5 points)

Soit un signal discret $x(n)$ de spectre à support borné $[-B, B]$ en fréquences normalisées. On pose :

$$\begin{aligned} \hat{x}_N(n) &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \mathrm{C}_n^k x(n-k) \\ e_N(n) &= x(n) - \hat{x}_N(n) \end{aligned}$$

où $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

a) Montrer que la transformée en z de $e_N(n)$ vaut :

$$E_N(z) = (1 - z^{-1})^N X(z)$$

Indications :
- $\mathrm{C}_n^0 = 1$
- $(1-x)^N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{C}_n^k x^k$

b) Exprimer le module de la tranformée de Fourier à temps discret de $e(n)$, $|E_N(f)|$, en fonction de $|X(f)|$ (f = fréquence normalisée). À quelle condition sur f a-t-on

$$\lim_{N \to +\infty} |E_N(f)| = 0$$

? Indication : $1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\alpha} = 2\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} \sin \alpha$.

c) Supposons que l'on dispose de tous les échantillons de $x(n)$ jusqu'à un certain instant n_0. Comment peut-on prédire la suite ?