

M1 informatique : Traitement du signal et des images

Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

5 novembre 2013

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours signaux 1D (6 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

- a) Sur la figure 1 sont représentés deux signaux temporels, 1 et 2, et deux spectres d'amplitude, A et B. Indiquer quel spectre peut correspondre à quel signal, en justifiant votre réponse.

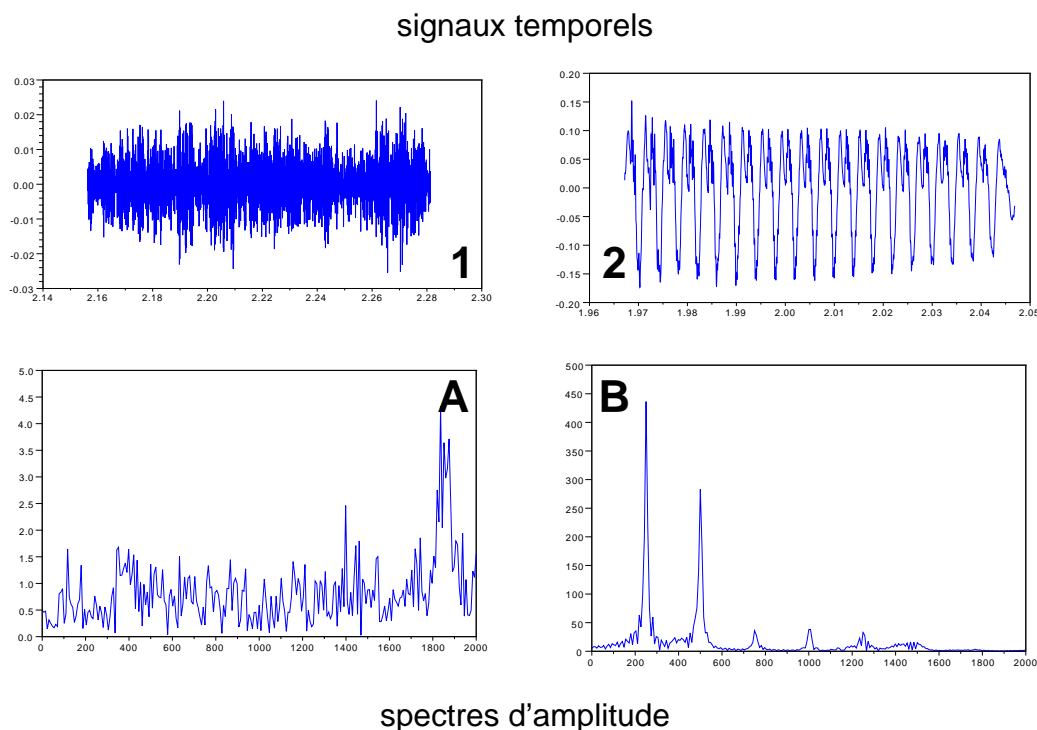


FIG. 1 – Appariement signal / spectre.

b) Lorsqu'on observe un signal périodique et que l'on calcule son spectre, pourquoi est-il impossible d'obtenir exactement un spectre de raies ?

c) Soit une fonction de la fréquence $X(\nu)$, non nulle sur un intervalle $[-B; B]$ et qui s'annule pour toute fréquence $\nu > B$ ou $\nu < -B$. Pourquoi cette fonction ne peut-elle être le spectre d'un signal échantillonné ?

d) Énoncez le théorème de Shannon.

e) On peut reconstruire parfaitement un signal $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée $x[n]$ selon la formule :

$$s(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \text{sinc}(\pi \nu_e t - \pi n)$$

Pourquoi cette formule est-elle difficilement utilisable en pratique ?

2 Questions de cours Image (7 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) Qu'est ce que l'échantillonnage d'une image ?

b) Qu'est ce que la quantification d'une image ?

c) A quelles résolutions d'une image ces notions sont elles liées ?

d) Expliquez le phénomène d'aliasing en 2D.

e) Donnez la définition de l'histogramme ; de l'histogramme normalisé et normalisé cumulé.

f) En quoi l'histogramme constitue un outil de caractérisation de luminance/contraste d'une image ?

3 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

3.1 Cryptage du son (3,5 points)

On souhaite réaliser un système de cryptage du son proche de celui utilisé par Canal+ : pour un signal de spectre borné, il s'agit de permuter la partie positive et la partie négative du spectre, comme indiqué sur la figure 2. Le son devient alors incompréhensible et peut être décrypté par l'opération inverse.

On rappelle que pour tout signal $x(t)$ de transformée de Fourier $X(\nu)$,

$$\text{TF}[x(t)\cos(2\pi\nu_0t)] = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}X(\nu + \nu_0)$$

a) En multipliant le signal par une sinusoïde puis en filtrant le résultat par un filtre passe-bas, on peut réaliser la permutation fréquentielle représentée sur la figure 2. Expliquer comment, en illustrant votre explication par des figures.

b) Comment alors décrypter le son ?

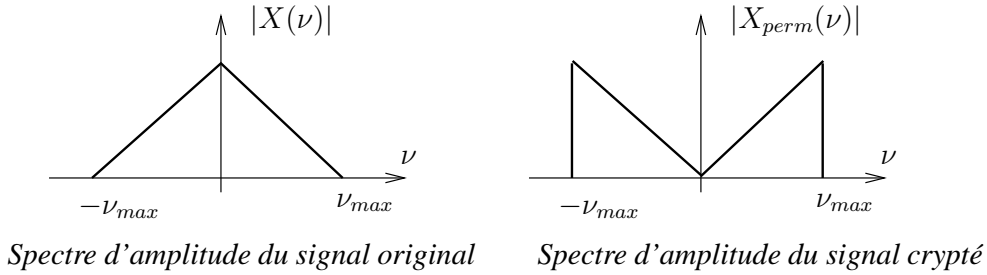


FIG. 2 – Permutation spectrale.

3.2 Echantillonnage (3,5 points)

Pour certaines applications comme la réduction de bruit ou le codage, on applique aux signaux audio un traitement différencié par bande de fréquence. A cet effet, le signal est décomposé en N signaux à bande étroite par un banc de $N - 1$ filtres passe-bande et 1 filtre passe-bas, selon le schéma de la figure ci-dessous. On considère ici une décomposition en 4 sous-bandes et un signal de spectre triangulaire s'étendant sur une bande limitée $[-B; B]$.

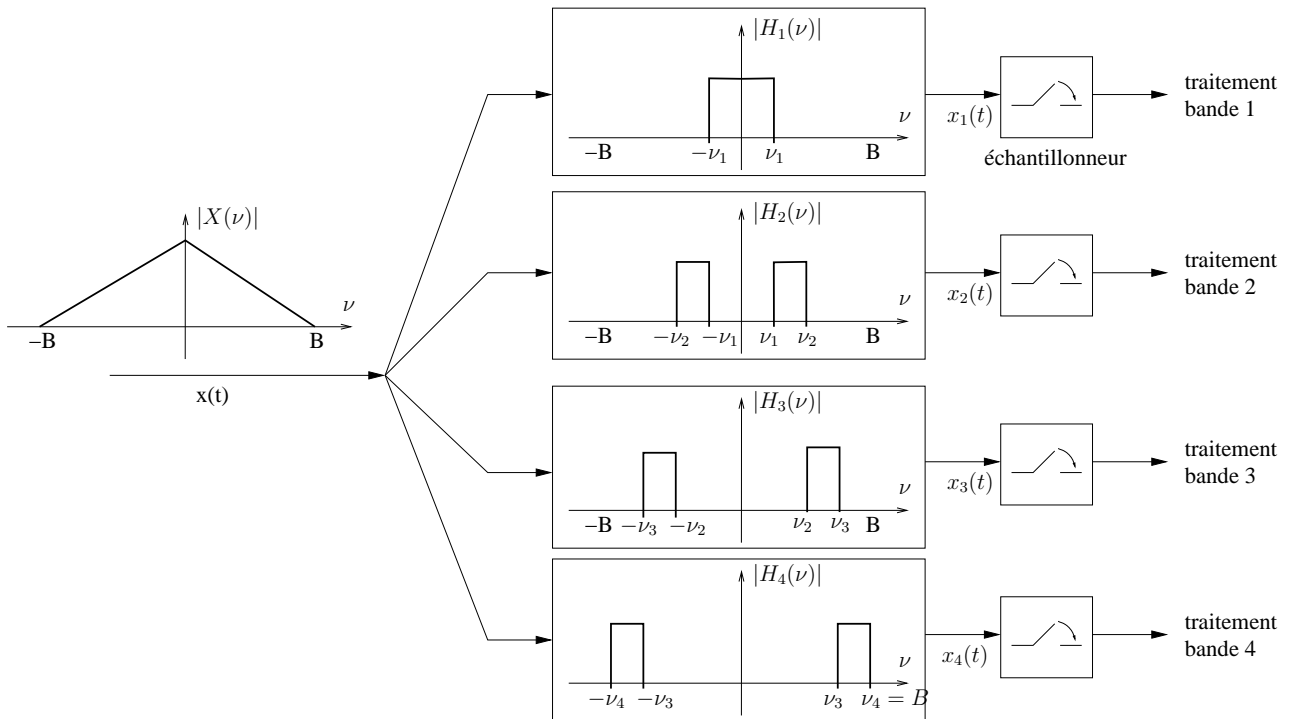


FIG. 3 – Traitement d'un signal par sous-bandes.

Le signal $x_3(t)$ de la 3ème bande a ainsi le spectre d'amplitude représenté sur la figure 4.

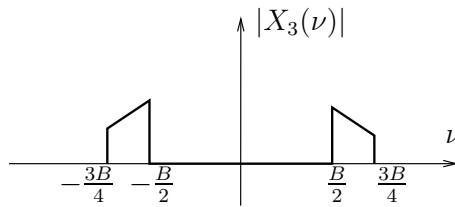


FIG. 4 – Spectre d’amplitude du signal de la 3ème bande.

- a) D’après le théorème de Shannon, quelle fréquence d’échantillonnage permet un échantillonnage sans perte d’information sur la 3ème bande ?
- b) On échantillonne $x_3(t)$ à la fréquence d’échantillonnage $B/2$. Tracer le spectre d’amplitude du signal échantillonné, noté $X_3^e(\nu)$. Comment peut-on récupérer l’information du signal x_3 original ?
- c) Chaque bande subit, après l’échantillonnage, un traitement numérique qui nécessite K opérations par échantillon. Quel est l’intérêt de la réduction de la fréquence d’échantillonnage ?

4 Formulaire

Transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \text{TF}[x(t)] = X(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \\ \text{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu \\ \text{TF}[s(t-a)] &= e^{-j2\pi\nu a} S(\nu) \\ \text{TF}[s(t)e^{j2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu - \nu_0) \\ \text{TF}[e^{j2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$

Reconstruction parfaite d’un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \text{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$