M1 informatique : Traitement du Signal et des images
Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

18 novembre 2010

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours (6 + 3,5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) On enregistre un claquement de porte. Ce signal audio a-t-il un spectre large ou étroit ? Pourquoi ?

b) La figure 1 représente trois signaux temporels continus ou discrets numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois spectres d'amplitude a, b et c (ligne du bas). Indiquez le spectre correspondant à chaque signal en justifiant vos choix.

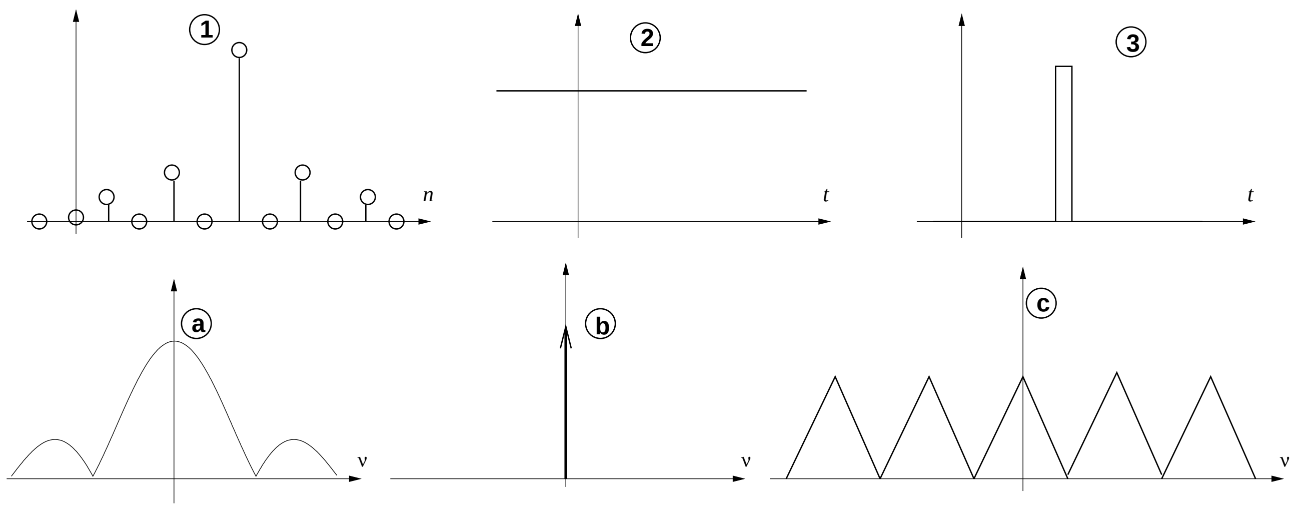

FIG. 1 –

c) Soit un filtre analogique de réponse impulsionnelle $h(t)$. Pourquoi peut-on dire que la réponse du système à l'impulsion de Dirac retardée de θ, $\delta(t - \theta)$, vaut $h(t - \theta)$? Donnez un exemple de système pour lequel cela n'est pas vrai.

d) Pourquoi ne représente-t-on généralement le spectre d'un signal échantillonné à la fréquence ν_e que de $-\frac{\nu_e}{2}$ à $+\frac{\nu_e}{2}$?

e) Que peut-il se produire si un signal de fréquence maximale $\nu_{\max}$ est échantillonné à une fréquence $\nu_e < 2\nu_{\max}$? Comment l'éviter si l'on ne connaît pas $\nu_{\max}$?

f) Décrivez les 2 étapes qui ont lieu lors de l'acquisition d'un signal image.

g) Qu'est ce que l'histogramme d'une image ?

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Image (3,5 points)

a) Sur la figure ci-jointe, retrouver pour chaque image la correspondance entre image, histogramme, et histogramme cumulé.

b) Quelle est à votre avis l'image originale ? Quel type de transformations d'histogramme a-t-on appliqué sur cette image originale pour obtenir chacune des deux autres images ?

c) Une des deux transformations vous paraît-elle plus appropriée dans le cas de cette image originale ?

2.2 Système dynamique (3,5 points)

Le circuit résistance-inductance de la figure 2, alimenté par la tension $x(t)$, est un système dynamique d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, régi par l'équation suivante :

$$y'(t) + \frac{R}{L} y(t) = x'(t)$$

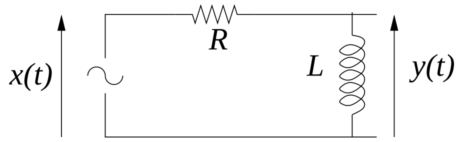

FIG. 2 – Circuit RL.

a) Donner la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce filtre.

b) Calculer son module $|H(\nu)|$. Donner les variations de $1/|H(\nu)|$ (sans calculer de dérivée !), en déduire celles de $|H(\nu)|$. De quel type de filtre s'agit-il ?

2.3 Echantillonnage (3,5 points)

Préliminaire : que vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$?

Soit un signal $x(t)$ composé de deux sinusoïdes à 100 et 300 Hz respectivement, dont le spectre (en amplitude et en phase) est représenté sur la figure 3. Ce signal est échantillonné à la fréquence ν_e =400 Hz. Montrer, en vous aidant de dessins, que le signal résultant est nul.

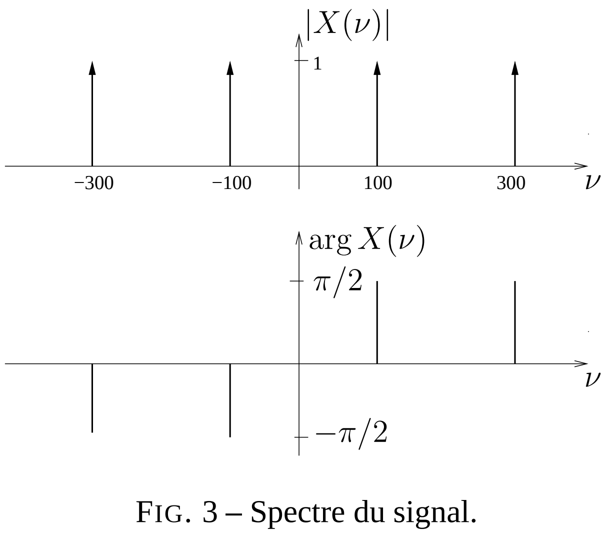

FIG. 3 – Spectre du signal.

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)]$$

$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$

$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu-\nu_0)$$

$$\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)$$

$$\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1]$$

$$\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1]$$

$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu-\nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2\mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2\mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\mathrm{d}\nu$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec :} \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

Convolution :

$$\begin{aligned} x * y &= y * x \\ x * \delta &= x \\ x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \end{aligned}$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$