M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

5 novembre 2009

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours (7 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) Pourquoi un signal très bref ne peut-il avoir un spectre étroit ?

b) Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ apériodiques d'énergie finie. On note $\Gamma_{xy}(\tau)$ la corrélation entre x et y. Si $\Gamma_{xy}(\tau)$ est maximal en $\tau = 1$ s, qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

c) L'espérance d'un signal $x(t)$ aléatoire stationnaire se calcule de manière générale par :

$$\mathrm{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x$$

ce qui suppose de disposer d'un modèle probabiliste du signal. Quel est l'intérêt de l'hypothèse d'ergodicité pour le calcul approché de l'espérance et de l'autocorrélation d'un signal stationnaire ?

d) Enoncez le théorème de Wiener-Khinchine.

e) Qu'est-ce que la réponse impulsionnelle d'un filtre ?

f) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\nu_c > B$. Que peut-on dire sur la sortie ? (il y a 2 choses à dire).

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Modulation BLU (6 points)

Pour transmettre un signal d'information $m(t)$ par voie hertzienne, on peut utiliser un modulateur à bande latérale unique (BLU), dont le schéma de principe est représenté sur la figure 1.

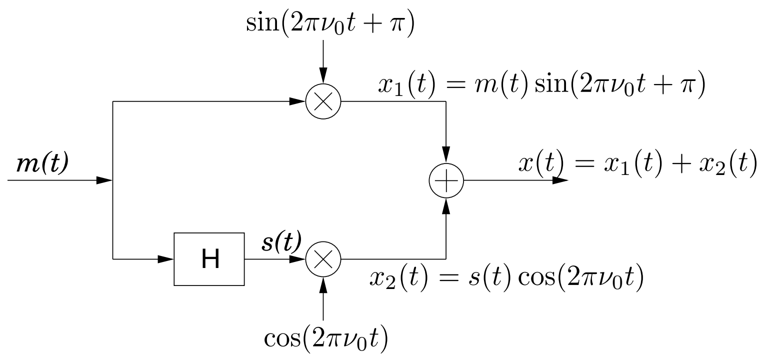

FIG. 1 – Modulation à bande latérale unique.

Le filtre H a pour réponse fréquentielle $H(\nu) = -\mathrm{j.signe}(\nu)$, représentée en module et en phase ci-dessous. Le signal $m(t)$ a pour spectre $M(\nu)$, représenté sur la figure 3. **On suppose que $\nu_M \ll \nu_0$.**

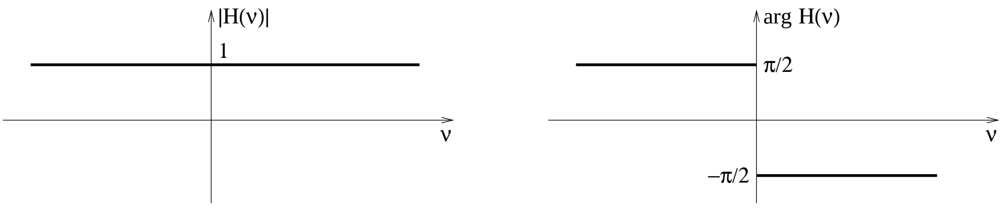

FIG. 2 – Réponse fréquentielle du filtre H.

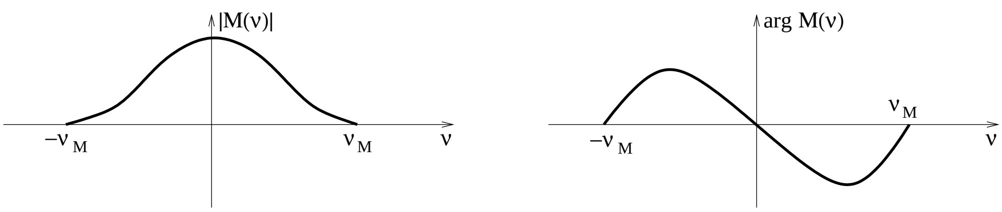

FIG. 3 – Spectre du signal d'information.

a) Dessiner $S(\nu)$, le spectre de $s(t)$ (module et argument). *NB : les dessins peuvent être faits à main levée, ils doivent juste être clairs.*

b) On sait que le spectre de $x_2(t)$ peut s'exprimer par $X_2(\nu) = \frac{1}{2}\Big(S(\nu - \nu_0) + S(\nu + \nu_0)\Big)$. Dessiner le module et l'argument de $X_2(\nu)$.

c) On peut montrer par le même calcul que $X_1(\nu) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\Big(M(\nu + \nu_0) - M(\nu - \nu_0)\Big)$. $X_1(\nu)$ est représenté sur la figure 4. Dessiner $|X(\nu)|$, le spectre d'amplitude de $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. A toutes fins utiles, on rappelle que $Ae^{\mathrm{j}(\alpha+\pi)} = -Ae^{\mathrm{j}\alpha}$ et que $|X(\nu)| \neq |X_1(\nu)| + |X_2(\nu)|$.

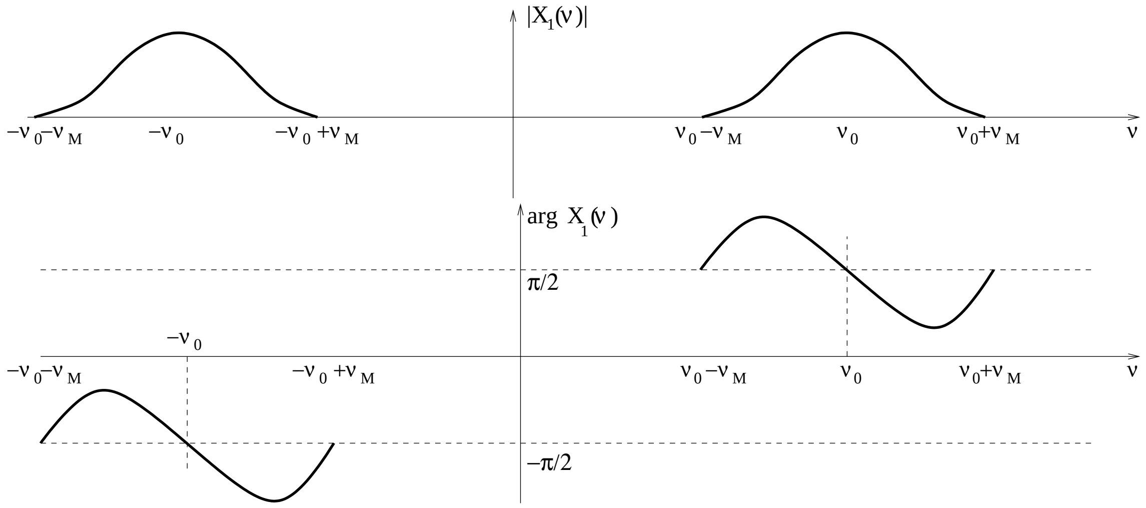

FIG. 4 – Spectre de $x_1(t)$.

d) Dans une modulation d'amplitude classique à suppression de porteuse, on aurait :

$$X(\nu) = \frac{1}{2}\Big(M(\nu + \nu_0) + M(\nu - \nu_0)\Big),$$

tel que représenté en module sur la figure 5. Quel est l'intérêt de la modulation BLU ?

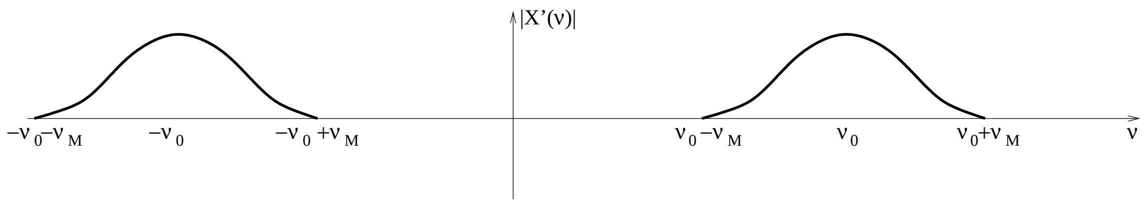

FIG. 5 – Spectre de $x(t)$ pour une modulation d'amplitude classique.

2.2 Analyse fréquentielle d'un système dynamique (7 points)

Soit un système dynamique dont l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ sont reliées par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{4\pi^2}y''(t) + \frac{\alpha}{2\pi}y'(t) + \nu_0 y(t) = x(t)$$

a) Calculer la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce système, puis son module $|H(\nu)|$.

b) Calculer la réponse fréquentielle en décibels, $H_{\mathrm{dB}}(\nu) = 20\log(|H(\nu)|)$. On souhaite tracer $H_{\mathrm{dB}}(\nu)$ en fonction de $\log(\nu)$ pour $\nu > 0$. Déterminer les asymptotes pour $\log(\nu) \to -\infty$ et $\log(\nu) \to \infty$. Tracer alors $H_{\mathrm{dB}}(\nu)$ en fonction de $\log(\nu)$, en vous aidant de la figure 6

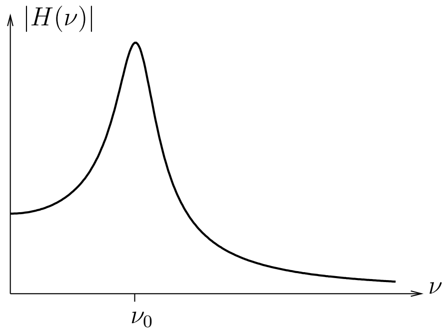

FIG. 6 – Réponse fréquentielle du filtre, en module.

c) Soit un signal $x(t)$ dont le spectre d'amplitude est représenté sur la figure 7. De quel type de signal s'agit-il ? Déterminer le spectre d'amplitude de la réponse du système à x.

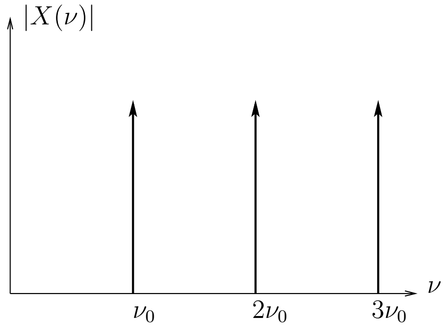

FIG. 7 – Spectre d'amplitude du signal d'entrée $x(t)$.

d) Si $\alpha = 0$, expliquer pourquoi le filtre devient instable.

3 Formulaire

Pour deux fonctions f et g,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)]$$

$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$

$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu - \nu_0)$$

$$\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)$$

$$\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1]$$

$$\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1]$$

$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

$$\gamma_s(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \delta_{n\nu 0}(\nu) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Pour $s(t)$ aléatoire stationnaire :

$$\Gamma_s(\tau) = \mathrm{E}[s(t)s(t-\tau)]$$
$$\gamma_s(\nu) = \mathrm{TF}[\Gamma_s(\tau)]$$
$$P = \mathrm{E}[|s(t)|^2] = \Gamma_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Convolution :

$$x * y = y * x$$
$$x * \delta = x$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Pour x processus aléatoire stationnaire,

$$\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$$
$$\gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2\gamma_x(\nu)$$

Pour deux événements A et B,

$$\Pr(A, B) = \Pr(A|B)\Pr(B)$$

Pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un ensemble discret $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$,

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} X_i \Pr(X_i)$$