M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h45

8 novembre 2007

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Questions ouvertes (3,5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

1) Chacune des 3 figures ci-dessous représente soit le spectre d'amplitude soit la densité spectrale de puissance d'un signal. Pour chacune, indiquer quelle peut être la nature du signal correspondant : analogique, échantillonné, périodique, apériodique, déterministe, aléatoire, ...

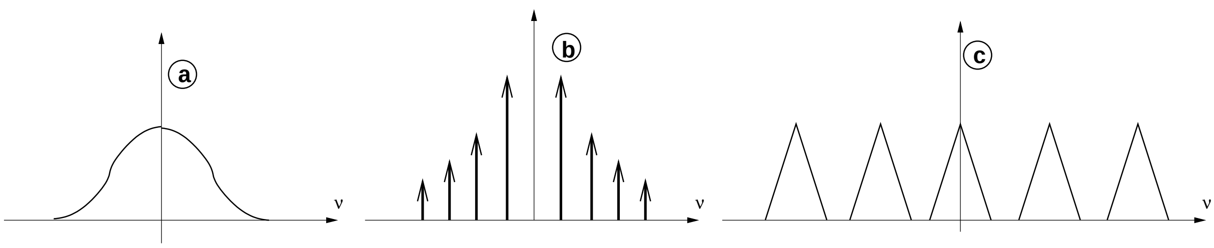


FIG. 1 –

2) Pourquoi un signal très bref ne peut-il avoir un spectre étroit ?

3) Pour un signal $x(t)$ apériodique d'énergie finie, de spectre $X(\nu)$, pourquoi appelle-t-on $|X(\nu)|^2$ la "densité spectrale d'énergie" de $x(t)$?

1.2 QCM (2 points)

Pour chaque question, indiquez sur votre copie, sans explication, toutes les affirmations justes. Le barême est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon.

1) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_c > B$.

a) Le signal de sortie est aussi stationnaire.
b) On ne peut pas prévoir la moyenne du signal de sortie.
c) Le signal de sortie a la même DSP que le signal d'entrée.
d) Le signal de sortie a la même puissance que le signal d'entrée.

2) Soit $x(t)$ un signal continu périodique.

a) Sa transformée de Fourier est un spectre de raies.
b) Sa densité spectrale de puissance contient la même information que $x(t)$.
c) Sa transformée de Fourier contient la même information que $x(t)$.
d) Son spectre d'amplitude contient la même information que $x(t)$.

2 Exercices

2.1 Cryptage du son (4 points)

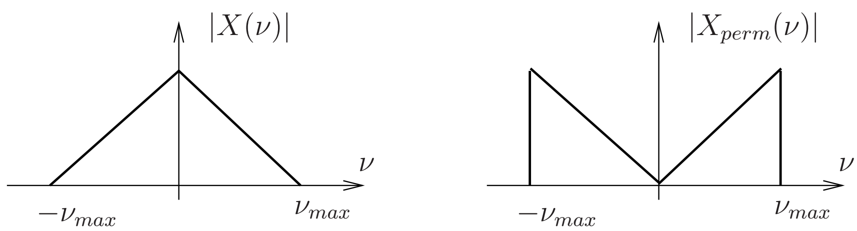
On souhaite réaliser un système de cryptage du son proche de celui utilisé par Canal+ : pour un signal de spectre borné, il s'agit de permuter la partie positive et la partie négative du spectre, comme indiqué sur la figure 2. Le son devient alors incompréhensible et peut être décrypté par l'opération inverse.

a) Montrer que pour tout signal $m(t)$ de transformée de Fourier $M(\nu)$,

$$\text{TF}[m(t)cos(2\pi\nu_0 t)] = \frac{1}{2}M(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}M(\nu + \nu_0)$$

b) En multipliant le signal par une sinusoïde puis en filtrant le résultat par un filtre passe-bas, on peut réaliser la permutation fréquentielle. Expliquer comment, en illustrant votre explication par des figures.

c) Comment alors décrypter le son ?



Spectre d'amplitude du signal original *Spectre d'amplitude du signal crypté*

FIG. 2 – Permutation spectrale.

2.2 Détecteur de tonales (5 points)

Le problème est celui de la détection d'une sinusoïde noyée dans du bruit, qui se pose par exemple lorsqu'un service téléphonique interactif (utilisant les "bips" des touches) est utilisé avec une liaison très bruitée (téléphone mobile dans un environnement urbain). La détection est d'autant plus fiable que le rapport signal à bruit (RSB) est fort. Le RSB est défini ici comme le rapport entre la puissance de la sinusoïde $s(t)$ et celle du bruit $b(t)$ à l'entrée du détecteur : $RSB = P_s/P_b$

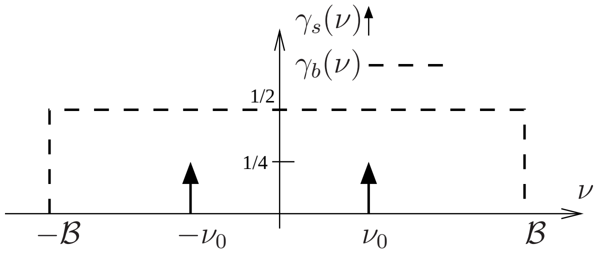


FIG. 3 – DSP du mélange $s(t) + b(t)$.

a) Les densités spectrales de puissance (DSP) des signaux à l'entrée du détecteur sont représentées sur la figure 3. Calculer le RSB.

b On place avant le détecteur un filtre passe-bande idéal, de bande passante $[\nu_0 - \frac{\Delta}{2}; \nu_0 + \frac{\Delta}{2}]$, tel que $\Delta \ll \mathcal{B}$ (voir figure ci-dessous). Quels signaux aura-t-on en sortie du filtre ? Quel est l'intérêt de ce filtrage ?

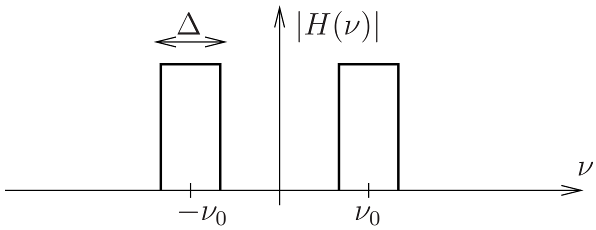


FIG. 4 – Réponse fréquentielle (en module) du filtre passe-bas.

2.3 Système dynamique (5 points)

Soit un filtre dont l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ sont liées par l'équation différentielle :

$$y(t) + \frac{1}{2\pi} y'(t) = x(t) + \frac{1}{\pi} x'(t)$$

a) Calculez la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce filtre et son module.

b) Etudiez les variations de $|H(\nu)|^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Calculez la valeur de $|H(\nu)|$ en 0 et sa limite en $+\infty$. Tracez l'allure de $|H(\nu)|$.

3 Formulaire

Pour deux fonctions f et g,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$
$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)]$$
$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$
$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu - \nu_0)$$
$$\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)$$
$$\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1]$$
$$\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1]$$
$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu \tag{1}$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

$$\gamma_s(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \delta_{n\nu 0}(\nu) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Pour $s(t)$ aléatoire stationnaire :

$$\Gamma_s(\tau) = \mathrm{E}[s(t)s(t-\tau)]$$
$$\gamma_s(\nu) = \mathrm{TF}[\Gamma_s(\tau)]$$
$$P = \mathrm{E}[|s(t)|^2] = \Gamma_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Convolution :

$$x * y = y * x$$
$$x * \delta = x$$
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Pour x processus aléatoire stationnaire,

$$\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$$
$$\gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2 \gamma_x(\nu)$$