M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h45

23 novembre 2006

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie..

1 Questions de cours

1.1 QCM (5 points)

Le barême est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon. Pour chaque question 1 à 4, cochez toutes les affirmations justes.

1) Lesquels de ces personnages sont des figures du traitement du signal ?

☐ **Adolph Fischer** ☐ **Claude Shannon**
☐ **Norbert Wiener** ☐ **Friedrich Hayek**

2) La figure 1 représente la densité spectrale de puissance

☐ **d'un signal périodique** ☐ **d'un signal aléatoire** ☐ **d'aucun signal**

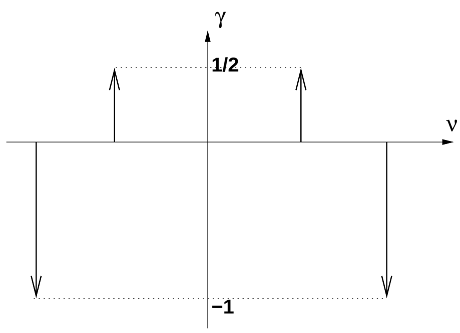

FIG. 1 –

3) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-haut de fréquence de coupure $\nu_c < B$.

☐ **Le signal de sortie est aussi stationnaire.**
☐ **On ne peut pas prévoir la moyenne du signal de sortie.**
☐ **Le signal de sortie a des variations temporelles plus rapides que le signal d'entrée.**

4) Lorsqu'on échantillonne à la fréquence ν_e un signal de fréquence maximale $\nu_{\max}$, le théorème d'échantillonnage de Shannon exige que

☐ $\nu_e > 2\nu_{\max}$ ☐ $\nu_e > \nu_{\max}/2$ ☐ **l'on utilise un filtre anti-repliement**

5) la figure 2 représente trois signaux temporels numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois densités spectrales de puissance a, b et c (ligne du bas). Indiquez pour chaque signal temporel la lettre du spectre correspondant :

1 : ... 2 : ... 3 : ...

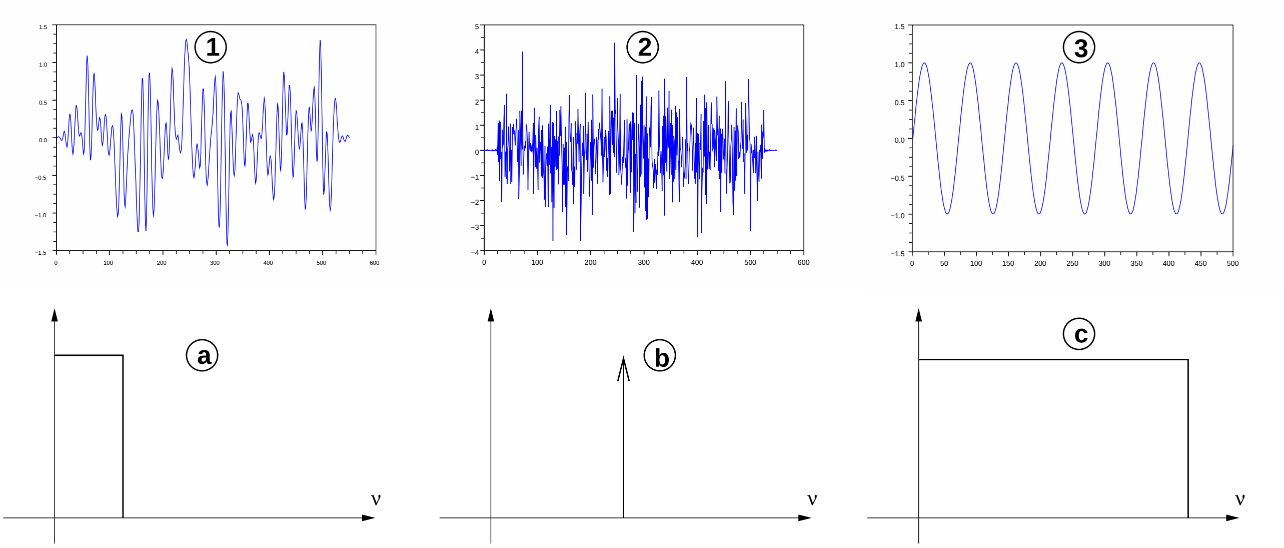

FIG. 2 –

1.2 Questions ouvertes (3 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes.

1) Qu'est-ce qu'un système stationnaire ? Donner un exemple de système non stationnaire (en expliquant pourquoi).

2) Est-il nécessaire de connaître le spectre d'un signal avant de l'échantillonner ? Justifiez votre réponse.

3) Calculez la puissance du signal dont la densité spectrale de puissance est représentée sur la figure 3

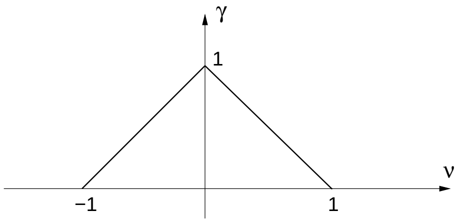

FIG. 3 –

2 Exercices

2.1 Multiplexage de données numériques (7 points)

On cherche à transmettre simultanément deux signaux échantillonnés $x(n)$ et $y(n)$. Les spectres des signaux analogiques originaux, respectivement $X(\nu)$ et $Y(\nu)$, sont tels que

$$X(\nu) = Y(\nu) = 0 \quad \forall \nu \text{ tel que } |\nu| > \nu_e/4$$

comme le montre la figure 4

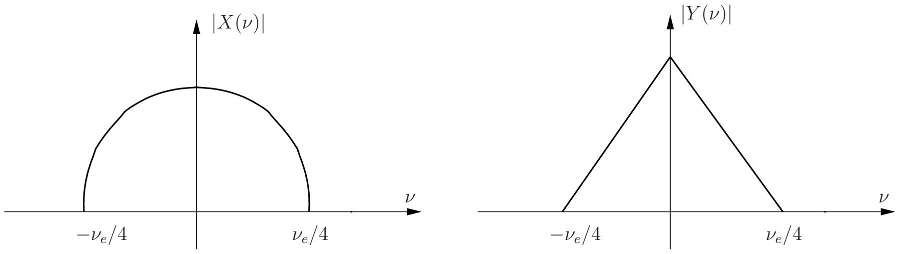

FIG. 4 – Spectres d'amplitude des signaux analogiques originaux.

1) Dessiner les spectres d'amplitude de $x(n)$ et $y(n)$ (respectivement $|X_e(f)$ et $|Y_e(f)|$) pour les fréquences normalisées $f \in \left[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right]$

2) On pose $z(n) = (-1)^n y(n)$ et on transmet $w(n) = x(n) + z(n)$. Montrer que

$$Z_e(f) = Y_e(f + 1/2)$$

avec $Z_e(f)$ et $Y_e(f)$ les spectres respectifs de $z(n)$ et $y(n)$ en fréquence normalisée.

3) Dessiner sur la même figure $X_e(f)$ et $Z_e(f)$. Comment peut-on récupérer $x(n)$ lorsqu'on reçoit $w(n)$?

4) Comment récupérer $y(n)$ lorsqu'on reçoit $w(n)$?

2.2 Analyse fréquentielle d'un système dynamique (6 points)

Une boule aimantée de masse m est liée au référentiel par un ressort de raideur k et de coefficient de frottement α. Elle est soumise à un champ magnétique variable, qui exerce sur elle une force $f(t)$. On note $z(t)$ l'altitude de la boule. L'ensemble, représenté sur la figure 5, constitue un système dynamique d'entrée $f(t)$ et de sortie $z(t)$, régi par l'équation différentielle suivante :

$$mz''(t) + \alpha z'(t) + kz(t) = f(t)$$

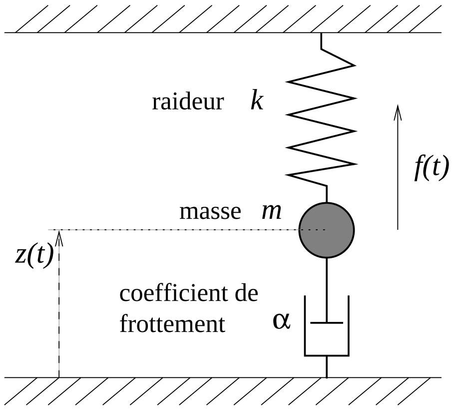

FIG. 5 –

1) Donnez la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce système.

2) On suppose que $\alpha^2 = 2mk$. Montrer alors que :

$$|H(\nu)|^2 = \frac{1}{k^2 + 16\pi^4 m^2 \nu^4}$$

3) Après avoir déterminé le sens de variation de la fonction $|H(\nu)|$ sur $\mathbb{R}^+$ et les asymptotes de $|H(\nu)|_{\text{dB}}$ en $\nu = 0$ et $\nu \to \infty$, tracer son diagramme de Bode (axe des abscisses : $\log(\nu)$, axe des ordonnées : $|H(\nu)|_{\text{dB}}$). Quel type de filtre est-ce ?

4 On définit la fréquence de coupure à -3 dB comme la fréquence ν_c pour laquelle $|H(\nu_c)|_{\text{dB}} = \max(|H(\nu)|_{\text{dB}}) - 3\,\text{dB}$. On assimile à présent ce filtre à un filtre idéal de même type : si $|H(\nu)|_{\text{dB}} > \max(|H(\nu)|_{\text{dB}}) - 3$ dB, on considère que $H(\nu) \simeq 1$, sinon $H(\nu) \simeq 0$. La force magnétique exercée sur la boule, $f(t)$ est aléatoire, de densité spectrale de puissance $\gamma_f(\nu)$ telle que représentée sur la figure 6. Déterminer $z(t)$.

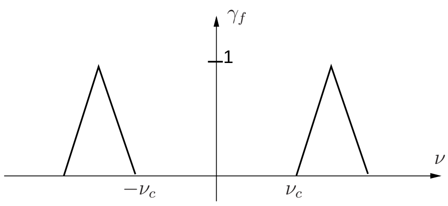

FIG. 6 – Densité spectrale de puissance de $f(t)$.

3 Formulaire

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\
\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \\
\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)] \\
\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu-\nu_0) \\
\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu) \\
\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1] \\
\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1] \\
\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu-\nu_0)
\end{aligned}$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$
$$\gamma_s(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \delta_{n\nu 0}(\nu) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Pour $s(t)$ aléatoire stationnaire :

$$\begin{aligned}
\Gamma_s(\tau) = \mathrm{E}[s(t)s(t-\tau)] \\
\gamma_s(\nu) = \mathrm{TF}[\Gamma_s(\tau)] \\
P = \mathrm{E}[|s(t)|^2] = \Gamma_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\nu)\mathrm{d}\nu
\end{aligned}$$

Convolution :

$$\begin{aligned}
x * y = y * x \\
x * \delta = x \\
x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)
\end{aligned}$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Pour x processus aléatoire stationnaire,

$$\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$$
$$\gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2\gamma_x(\nu)$$

Pour un signal échantillonné à la fréquence $\nu_e = 1/T_e$, $s[n]$:

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}[s[n]] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$
$$s[n] = \mathrm{TFTD}^{-1}[S_e(\nu)] = \frac{1}{\nu_e}\int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} S_e(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}\mathrm{d}\nu$$

En fréquence normalisée $f = \nu/\nu_e$,

$$S_e(f) = \mathrm{TFTD}[s[n]] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$
$$s[n] = \mathrm{TFTD}^{-1}[S_e(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} S_e(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n f}\mathrm{d}f$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

où $S(\nu)$ désigne le spectre du signal analogique originel.