M1 IPCC : Bases du Traitement du Signal
Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

2 décembre 2005

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. La plupart des questions de cours devraient pouvoir être traitées assez rapidement, de préférence en premier (bon rapport points/effort). Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra.

1 Questions de cours

1.1 QCM (4 points)

NB : Le barême est de +1 par réponse juste et -1/2 par réponse fausse. Il vaut donc mieux ne pas répondre que répondre au hasard.

1) Le spectre d'amplitude $|X(\nu)|$ d'un signal réel $x(t)$ est une fonction

☐ **paire** ☐ **impaire** ☐ **ni l'un ni l'autre**

2) Un signal aléatoire dont la densité spectrale de puissance (DSP) est concentrée dans les hautes fréquences a des variations temporelles plus rapides qu'un signal aléatoire dont la DSP est concentrée dans les basses fréquences.

☐ **vrai** ☐ **faux**

3) Un filtre causal est nécessairement stable.

☐ **vrai** ☐ **faux**

4) Selon le théorème d'échantillonnage de Shannon, échantillonner à la fréquence ν_e un signal de fréquence maximale $\nu_{\max} > \nu_e/2$ se traduit toujours par une perte d'information.

☐ **vrai** ☐ **faux**

1.2 Questions ouvertes (4 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes.

1) Qu'est-ce qui différencie le spectre d'un signal périodique du spectre d'un signal apériodique d'énergie finie ?

2) Soit un signal $s(t)$ périodique de péridode fondamentale ν_0. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de son développement en série de Fourier (généralisée). Pourquoi la fonction $\nu \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \delta_{n\nu_0}(\nu)$ s'appelle-t-elle la densité spectrale de puissance de $s(t)$?

3) Qu'est-ce qu'un système stationnaire ? Donner un exemple de système non stationnaire (en expliquant pourquoi).

4) Quel est le rôle du filtre anti-repliement placé avant un échantillonneur de fréquence d'échantillonnage ν_e ? Quelles doivent être ses caractéristiques : passe-bas / passe-haut / passe-bande / réjecteur de bande, fréquence(s) de coupure ?

2 Exercices

2.1 Echantillonnage (6 points)

Soit un signal $x(t) = a(t) + b(t)$, dont le spectre $X(\nu)$ est représenté sur la figure 1. Le signal $a(t)$ est un signal apériodique d'énergie finie dont le spectre correspond à la partie continue de $X(\nu)$ (spectre de support borné $[-\nu_0; \nu_0]$).

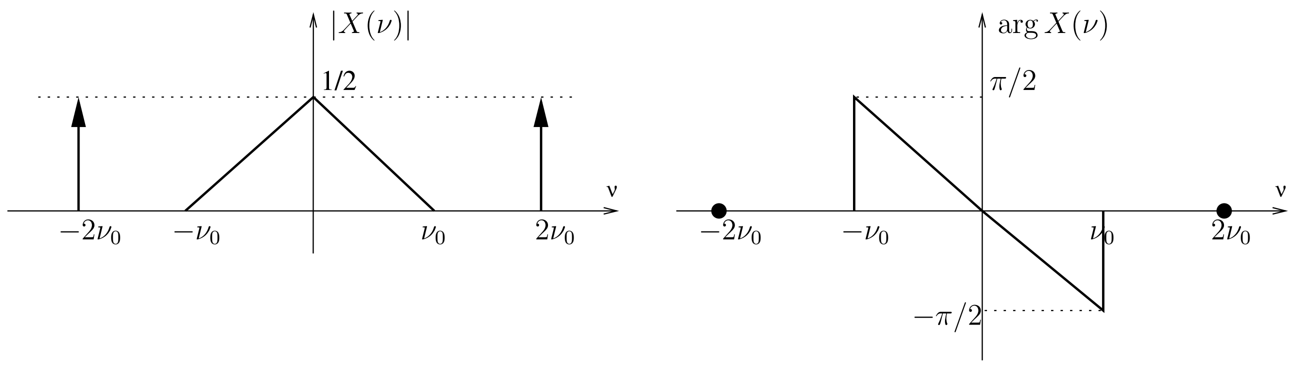

FIG. 1 – Spectre de $x(t)$.

1) Donner l'expression de $b(t)$.

2) On échantillonne $x(t)$ à la fréquence $\nu_e = 3\nu_0$.

a) Représenter le spectre du signal échantillonné.

b) Représenter le spectre du signal reconstruit $x'(t)$, obtenu par filtrage passe-bas de fréquence de coupure $\frac{3}{2}\nu_0$.

c) Exprimer $x'(t)$ en fonction de $a(t)$. Expliquer brièvement ce qui s'est passé.

2.2 Filtrage de signaux aléatoires : communications à spectre étalé (7 points)

Soit $x_1(t)$ un signal de communication, aléatoire, de densité spectrale de puissance (DSP) $\gamma_{x1}(\nu)$ nulle en dehors d'une bande de fréquence $[-B; B]$. Cette communication est brouillée par une autre communication portée par un signal $x_2(t)$ de même DSP : $\gamma_{x2}(\nu) = \gamma_{x1}(\nu)$.

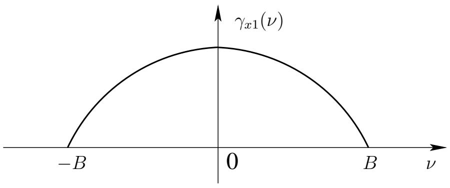

FIG. 2 – Densité spectrale de puissance de $x_1(t)$.

1) Calculer le rapport signal à interférence (RSI), défini comme le rapport entre la puissance P_{x1} du signal utile x_1 et celle P_{x2} du signal perturbateur x_2 : $RSI = P_{x1}/P_{x2}$. Plus le RSI est fort, meilleure est la transmission.

2) On adopte la technique de transmission à spectre étalé, selon le schéma de la figure 3. La première étape consiste à multiplier $x_1(t)$ par un signal pseudo-aléatoire $p(t)$, qui prend les valeurs +1 et -1. Ce signal a un rythme très supérieur à celui de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, ce qui se traduit par une largeur spectrale $B' \gg B$. Si l'on multiplie par $p(t)$ un signal $x(t)$ de DSP $\gamma_x(\nu) = \gamma_{x1}(\nu) = \gamma_{x2}(\nu)$ et de puissance P_x, le spectre du signal résultant $x'(t) = x(t)p(t)$ a une DSP $\gamma_{x'}(t)$ à peu près constante de valeur $P_x/2B'$ sur la bande $[-B'; B']$.

a) Le signal reçu est $r(t) = p(t)x_1(t) + x_2(t)$. Ce signal est multiplié par $p(t)$ en réception : on note $y(t) = r(t)p(t)$. Exprimer $y(t)$ en fonction de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $p(t)$.

b) Si deux signaux $a(t)$ et $b(t)$ sont indépendants, la DSP de leur somme est la somme de leurs DSP : $\gamma_{a+b}(\nu) = \gamma_a(\nu) + \gamma_b(\nu)$. En supposant que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont indépendants, exprimer la DSP de $y(t)$, $\gamma_y(\nu)$, comme la somme de deux termes, l'un étant $\gamma_{x1}(\nu)$ et l'autre la DSP $\gamma_{x2'}(\nu)$ d'un signal $x_2'(t)$ que l'on précisera. Représenter ces deux termes sur la même figure.

c) On filtre $y(t)$ par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure B. Soient $z_1(t)$ la réponse du filtre à $x_1(t)$ et $z_2(t)$ la réponse du filtre à $x_2'(t)$. Calculer le nouveau RSI : $RSI' = P_{z1}/P_{z2}$. Conclure.

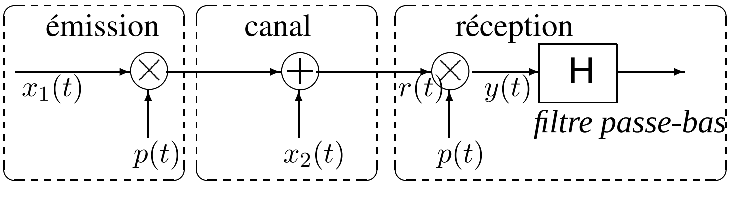

FIG. 3 – Transmission à spectre étalé.

3 Formulaire

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$
$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = TF[x(t)].TF[y(t)]$$
$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$
$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu - \nu_0)$$
$$\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)$$
$$\delta(t) = \mathrm{TF}^{-1}[1]$$
$$\delta(\nu) = \mathrm{TF}[1]$$
$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0)$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \ : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$
$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Pour $s(t)$ aléatoire stationnaire :

$$\Gamma_s(\tau) = \mathrm{E}[s(t)s(t-\tau)]$$
$$\gamma_s(\nu) = \mathrm{TF}[\Gamma_s(\tau)]$$
$$P = \mathrm{E}[|s(t)|^2] = \Gamma_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Convolution :

$$x * y = y * x$$
$$x * \delta = x$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Pour x processus aléatoire stationnaire, y est aussi stationnaire et :

$$\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$$
$$\gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2\gamma_x(\nu)$$

Pour un signal échantillonné à la fréquence $\nu_e = 1/T_e$, $s[n]$:

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}[s[n]] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nT_e\nu}$$
$$s[n] = \mathrm{TFTD}^{-1}[S_e(\nu)] = \frac{1}{\nu_e}\int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} S_e(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nT_e\nu}\mathrm{d}\nu$$

En fréquence normalisée $f = \nu/\nu_e$,

$$S_e(f) = \mathrm{TFTD}[s[n]] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf}$$
$$s[n] = \mathrm{TFTD}^{-1}[S_e(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} S_e(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nf}\mathrm{d}f$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e\sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

où $S(\nu)$ désigne le spectre du signal analogique originel.