Math. Sci. hum. (*14*e année, n° 56, *1976*, p.5-46)

STRUCTURES LINEAIRES ET ANALYSE DES COMPARAISONS

H. ROUANET[1], D. LEPINE[2]

<u>*Avant-Propos*</u>

Le texte ci-dessous expose les aspects linéaires de la formalisation que nous proposons pour l'analyse statistique des données expérimentales, dans le cadre de ce que nous appelons une "approche algébrique" de cette analyse.(*Pour un bref exposé d'ensemble voir* [1]). *Il constitue le prolongement, considérablement étoffé mais direct, d'un premier article paru naguère dans cette revue* [2] *et qui proposait une formalisation dans un cadre linéaire abstrait de la notion-clef de l'expérimentation : celle de comparaison.*

Les notions et les procédures développées dans le présent texte ont servi de base à l'élaboration des programmes-machine de la série VAR rédigés par M.O. Lebeaux ; elles doivent donc être regardées comme appartenant au volet "théorique" d'une entreprise d'ensemble dont le volet "pratique" est constitué par ces programmes. Nous les avons déjà exposées à diverses reprises, notamment lors du stage d'initiation au programme VAR3 en Octobre 1975. Comme document de base sur le programme VAR3 voir [3]. *La rédaction actuelle diffusée en Janvier 1976 a été utilisée pour l'enseignement théoriq de DEA "Mathématiques et applications" de H. Rouanet en 1976-77, donné dans cadre de l'U.E.R. de Mathématiques, Logique Formelle et Informatique de l'Université René Descartes.*

---

[1] Université René Descartes, 12 rue Cujas Paris 5e

[2] Laboratoire de Psychologie expérimentale et comparée, Université René Descartes et E.P.H.E. 3ème Section, associé au C.N.R.S.

I - VARIABLES ET MESURES SUR UN SUPPORT.

Il est classique, en physique, d'opposer les grandeurs numériques "extensives" et les grandeurs numériques "intensives" ; par exemple, si l'on réunit deux quantités de liquide, leurs masses et leurs volumes s'ajoutent (ce sont des grandeurs extensives) alors que la température prise par le mélange (grandeur intensive) est la moyenne des températures des parties mélangées. Des distinctions analogues ont été proposées par certains psychophysiciens (cf. par exemple chez Stevens l'opposition entre continuum "prothétique" et continuum "métathétique").

Nous nous proposons de reprendre ici une telle distinction en en donnant une caractérisation formelle. Soit x d'une part et u d'autre part deux applications numériques définies sur un même support (ensemble fini) J ; pour fixer les idées nous illustrerons la démarche au moyen de l'exemple suivant : J désigne l'ensemble des douze mois d'une année déterminée, et on étudie une commune de France déterminée ; la valeur x(j) de l'application x est la température relative au mois j dans cette commune ; bien entendu cette valeur x(j) aura été dérivée à partir d'observations plus élémentaires ; il sera commode de considérer qu'elle a été obtenue en faisant la moyenne d'observations journalières, elles-mêmes dérivées d'observations horaires ou même instantanées ; d'autre part, la valeur u(j) de l'application u est le nombre de naissances enregistrées au cours du mois j dans la commune.

Pour distinguer les deux types d'applications auxquels x et u se rattachent respectivement, nous allons définir une procédure de dérivation permettant de prolonger d'une façon *naturelle* les applications x et u (définies sur l'ensemble J), à l'ensemble $\mathcal{P}$(J) des parties de J. Soit J' une partie de J (par exemple J' sera l'ensemble des trois premiers mois de l'année ; nous dirons le trimestre J'). Dans le cas de l'application x, il sera naturel d'associer à J' la valeur numérique obtenue en moyennant les valeurs x(j) sur l'ensemble des j appartenant à J'. On pourrait considérer la moyenne simple (équipondérée) $\frac{1}{|J'|} \sum_{J'} x(j)$ mais il apparaîtra sans doute préférable ici de prendre, en désignant par n_j le nombre de jours du mois j, la moyenne pondérée $x(J') = \frac{\sum_{J'} n_j \, x(j)}{\sum_{J'} n_j}$; cette valeur x(J') sera dite "température du trimestre J'" ; la dérivation cherchée pour l'application x sera dite dérivation par *moyennage*.

Dans le cas de l'application u, il sera naturel d'associer à J' la valeur numérique obtenue en effectuant la somme (ou total) des valeurs u(j) sur la partie J', soit : $u(J') = \sum_{J'} u(j)$, qui est le nombre de naissances survenues au cours du trimestre J'. Nous parlerons alors de dérivation par *sommation*.

D'une manière générale, le support J étant muni d'une pondération $(n_j)\ j \in J$, nous appellerons *variables* sur J les applications numériques définies sur J qui se prêtent à la dérivation par moyennage (les moyennes étant pondérées par les coefficients n_j) et *mesures* sur J les applications définies sur J qui se prêtent à la dérivation par sommation. Pour faire apparaître cette distinction dans les notations elles-mêmes nous noterons les variables et les valeurs qu'elles prennent au moyen d'indices supérieurs : $x = x^J = (x^j)\ j \in J$ et les mesures ainsi que les valeurs qu'elles prennent au moyen d'indices inférieurs : $u = u_J = (u_j)\ j \in J$.

Remarques sur le langage utilisé :

1°) La terminologie proposée ici présente l'avantage d'être compatible avec les usages mathématiques existants. En effet, la notion de "mesure" sur un ensemble, caractérisée ici dans un cadre élémentaire (ensembles finis) coïncide avec celle qui est développée dans la théorie mathématique de la mesure ; d'autre part, la notion de variable introduite ici pourra se prolonger sans heurt, en calcul des probabilités, en la notion de "variable aléatoire".

2°) Nous parlons ici simplement de "variable", aucune ambiguïté n'étant à craindre ; dans un contexte plus large, il serait préférable de désigner par "variable" une notion plus générale ; on pourrait alors appeler la présente notion "variable numérique".

3°) Le cas échéant on dira "fonction" au lieu de "variable" (par exemple on préférera parler de "fonction constante" plutôt que de "variable constante").

II - MESURE FONDAMENTALE SUR LE SUPPORT J.

Nous dirons qu'une mesure est *positive* si ses coefficients sont positifs, certains d'entre eux, mais non tous, pouvant être nuls, et qu'une mesure est *strictement positive* si tous ses coefficients sont (strictement) positifs.

Ci-dessus, nous avons noté n_j (nombre de jours du mois j) comme une mesure (indices inférieurs) car l'application $j \mapsto n_j$ est évidemment du type "dérivation par sommation" ; mais cette mesure sur J joue un rôle particulier : outre qu'elle est strictement positive, *elle sert à définir la dérivation par moyennage* pour les variables de support J ; nous l'appellerons *mesure fondamentale* sur J. Le plus souvent (mais non nécessairement) il s'agira comme dans l'exemple considéré ici d'une *mesure-effectifs*, c'est-à-dire de la mesure-image d'une mesure de dénombrement sur un support dont le support J est dérivé (dans l'exemple considéré : si l'on désigne par I l'ensemble des jours de l'année, on voit que la mesure-effectifs sur J, ensemble des mois, est l'image de la mesure de dénombrement sur I par l'application qui à chaque jour associe le mois auquel il appartient) ; les coefficients d'une mesure-effectifs sont donc des entiers positifs. Si la mesure fondamentale sur J n'est autre que la mesure de dénombrement sur J lui-même (i.e. si pour tout j, $n_j = 1$) on dira que le support J est "élémentaire" ou "non-pondéré" ; dans ce cas la dérivation par moyennage associe à toute partie J' la moyenne simple ou équipondérée des valeurs de la variable considérée, pour $j \in J'$. Mais on remarquera que, plus généralement, il en est ainsi dès que la mesure fondamentale sur J est *uniforme* car la dérivation par moyennage ne fait intervenir cette mesure qu'à un facteur (positif multiplicatif) près.

Remarque.

Chaque fois que la caractérisation d'une notion ne fera intervenir la mesure fondamentale sur un support qu'à un coefficient positif près, nous qualifierons cette mesure de *pondération* ; formellement, nous pouvons définir la pondération associée à une mesure positive comme un représentant de la classe d'équivalence des mesures positives proportionnelles à cette mesure.

Dans ce qui suit nous noterons toujours $n_J = (n_j)\ j \in J$ la mesure fondamentale sur le support J.

III - DUALITE DE L'ESPACE DES MESURES ET DE L'ESPACE DES VARIABLES.

1. Densité d'une mesure.

Associons à u_J, mesure sur J, l'application $u^J = (u^j)\ j \in J$ définie par : pour tout j : $u^j = \frac{u_j}{n_j}$; dans l'exemple considéré, u^j s'interpète comme le nombre moyen de naissances par jour, au cours du mois j. Cette fonction

u^J associée à la mesure u_J sera appelée la *densité* de cette mesure par rapport à la mesure fondamentale n_J. Nous la notons comme une variable sur J ; en effet, à la partie J' de J on associera le valeur $\frac{\sum_{J'} u_j}{\sum_{J'} n_j}$ (nombre moyen de naissances par jour au cours du trimestre J') qui est égale à $\frac{\sum_{J'} n_j u^j}{\sum_{J'} n_j}$; la dérivation naturelle pour u^J est donc bien la dérivation par moyennage. Nous avons ainsi défini une procédure de *représentation* des mesures sur J par des variables sur J ; on observera que cette procédure fait intervenir la mesure fondamentale n_J elle-même et non simplement la pondération correspondante.

Une telle représentation des mesures par leurs densités est une opération familière, considérée comme "signifiante" dans la culture occidentale sans doute depuis le 18ème siècle au moins. Qu'en est-il de la représentation réciproque, tout aussi aisée à définir dans le cas élémentaire (supports finis), consistant à associer à une variable x^J la mesure sur J dont elle est la densité, c'est-à-dire $x_J = (x_j)$ $j \in J$ définie par : $x_j = n_j\ x^j$? Dans l'exemple considéré, x_j est la somme, pour le mois j, des températures journalières relevées au cours de ce mois. La famille des totaux $x_j (j \in J)$ est bien une mesure sur J (au trimestre J' on associera $\sum_{J'} x_j$, somme pour tous les jours du trimestre, des températures journalières au cours de ce trimestre). Cependant, la mesure x_J associée à la variable x^J n'apparaît pas aussi immédiatement interprétable que la variable densité u^J associée à une mesure u_J. C'est pourquoi, lorsqu'on aura affaire à la fois à des variables et à des mesures sur un support pondéré J, on préférera, s'il est nécessaire de représenter les unes par les autres, utiliser la représentation des mesures par leurs densités plutôt que la représentation réciproque. Toutefois, il faut signaler que les familles de totaux associées aux variables seront souvent utilisées comme intermédiaires de calcul.

2. <u>Structure euclidienne</u>.

On désignera par $\mathbb{R}^J$ l'ensemble des variables (ou fonctions) sur J et par $\mathbb{R}_J$ l'ensemble des mesures sur J, ces deux ensembles étant canoniquement munis de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ensemble des réels) de dimensionalité J.

1° <u>Identification des mesures et des formes linéaires</u> : toute mesure sur J, soit u, peut être identifiée à une forme linéaire sur $\mathbb{R}^J$, à savoir l'application de $\mathbb{R}^J$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute fonction x associe le scalaire $\Sigma u_j\, x^j$. On identifiera donc l'espace des mesures $\mathbb{R}_J$ à l'espace vectoriel *dual* de l'espace $\mathbb{R}^J$ et lorsqu'on calculera pour un couple (u,x) formé d'une mesure et d'une fonction la valeur $\Sigma u_j\, x^j$ de la forme bilinéaire canonique sur $\mathbb{R}_J \times \mathbb{R}^J$ on dira qu'on "applique" la mesure u à la fonction x (ce qui correspond à la notion d'"intégrale d'une fonction par rapport à une mesure").

2° <u>Produit scalaire sur $\mathbb{R}^J$</u>. L'espace des fonctions sera muni du produit scalaire canoniquement *associé à la mesure fondamentale* n_J, à savoir le produit scalaire qui à tout couple de fonctions (x,y) sur J associe le scalaire $\Sigma\, n_j x^j\, y^j$. On remarque donc que ce produit scalaire *n'est pas* le produit scalaire "élémentaire" $\Sigma\, x^j\, y^j$, dont on munit souvent un espace de fonctions numériques, sauf si la mesure fondamentale sur J est la mesure de dénombrement sur J ($n_j = 1$ pour tout $j \in J$) ; toutefois le produit scalaire associé à la mesure fondamentale sera *proportionnel* au produit scalaire élémentaire $\Sigma\, x^j\, y^j$ si cette mesure est uniforme.

3° <u>Isomorphisme des deux espaces</u>. Ayant choisi un produit scalaire sur l'espace des fonctions, on lui associe l'isomorphisme de $\mathbb{R}_J$ sur $\mathbb{R}^J$ qui permet d'identifier le produit scalaire sur $\mathbb{R}^J$ à la forme bilinéaire canonique sur $\mathbb{R}_J \times \mathbb{R}^J$. Cet isomorphisme n'est autre que la représentation, définie ci-dessus, des mesures par leur densité par rapport à la mesure fondamentale ; en effet, de la représentation : $u_J \mapsto u^J$ définie par $u^j = \dfrac{u_j}{n_j}$, il résulte :

$$\Sigma\, u_j\, x^j = \Sigma\, n_j\, u^j\, x^j$$

Cet isomorphisme permet alors de transporter le produit scalaire sur l'espace des mesures : à tout couple (u,v) de mesures sur J on associe le produit scalaire de leurs densités : $\Sigma\, n_j\, u^j\, v^j$, d'où en revenant aux mesures :

$$\Sigma\, \frac{u_j\, v_j}{n_j}$$

Cette construction permettra de rendre compte des divers types de formules de calcul classiques dans lesquelles tantôt les coefficients de la mesure fondamentale (le plus souvent : des effectifs) apparaissent "au numérateur" (produit scalaire $\Sigma\, n_j\, x^j\, y^j$ sur l'espace des fonctions) tantôt apparaissent "au dénominateur" (produit scalaire $\Sigma \dfrac{u_j\, v_j}{n_j}$ sur l'espace des mesures), tantôt n'apparaissent pas (forme bilinéaire canonique entre les deux espaces).

4° Orthogonalité, norme, projection. Les deux espaces $\mathbb{R}^J$ et $\mathbb{R}_J$ étant maintenant munis de la structure d'espace vectoriel *euclidien* par le choix du produit scalaire associé à la mesure fondamentale et étant liés par l'isomorphisme mesures $\mapsto$ densités associé à cette mesure, on exploitera cette structure en utilisant les normes et les orthogonalités associées aux produits scalaires ; ainsi le carré de la norme d'une variable x sera donné par $\Sigma\, n_j (x^j)^2$ et le carré de la norme d'une mesure u sera donné par $\Sigma \frac{(u_j)^2}{n_j}$; une mesure u et une variable x seront orthogonales si $\Sigma\, u_j\, x^j = 0$, etc. Enfin, se plaçant dans l'un des deux espaces, on parlera de projection d'un vecteur sur un autre vecteur, ou sur un sous-espace, toujours au sens de projection orthogonale associée au produit scalaire. On observera que l'orthogonalité et la projection ne sont liées qu'à la pondération n_J, alors que la norme (comme le produit scalaire) est liée à la mesure n_J elle-même.

On remarquera enfin que deux mesures à supports disjoints sont toujours orthogonales quelle que soit la pondération adoptée.

IV - INERTIE D'UN PROTOCOLE.

1. Protocole pondéré.

On appellera "protocole numérique sur le support pondéré J" (nous dirons simplement ici "protocole sur J") la donnée d'une variable x de support J, ce support étant muni d'une mesure fondamentale qui est soit une *mesure-effectifs* soit une *mesure homogène à une mesure effectifs* (cf. par exemple la construction d'une mesure dite "harmonique" à partir d'une mesure-effectifs).

On appellera "espace de protocoles" l'espace $\mathbb{R}^J$ muni de la structure euclidienne associée à la mesure fondamentale n_J. La dimensionalité d'un sous-espace de l'espace des protocoles sera appelée son "nombre de degrés de liberté" (d.ℓ.).

2. Protocoles constants et protocoles centrés.

L'ensemble des protocoles *constants* de support J constitue un sous-espace à 1 d. ℓ. de l'espace des protocoles sur J.

Le protocole constant dont toutes les observations sont égales à la moyenne $\overline{x}$ du protocole x est la projection de x (orthogonale, vis-à-vis de la mesure fondamentale) sur le sous-espace des protocoles constants.

Un protocole x est dit *centré* si sa moyenne (par rapport à la mesure fondamentale bien entendu) est nulle ; donc x est centré si et seulement si $\Sigma\, n_j\, x^j = 0$, c'est-à-dire si x est orthogonal (au sens de la mesure fondamentale) à cette mesure fondamentale n_J ou encore, de manière équivalente, si x est orthogonal au sous-espace des protocoles constants. Donc l'ensemble des protocoles centrés est le sous-espace, à $|J| - 1$ d. ℓ. supplémentaire orthogonal de l'espace des protocoles constants.

La dérivation appelée "centrage" consiste à associer à tout protocole x le protocole centré des écarts entre les valeurs x^j et leur moyenne $\overline{x} = \frac{\Sigma n_j x_j}{\Sigma n_j}$, c'est-à-dire le protocole $(x^j - \overline{x})$ $j \in J$. Cette dérivation revient à projeter (orthogonalement) le protocole x sur le sous-espace des protocoles centrés.

3. Inertie d'un protocole.

On appellera *inertie* ou encore *somme des carrés* (SC) *totale* d'un protocole x le carré de la norme de la projection de ce protocole sur l'espace des protocoles centrés, donc le carré de la norme du protocole dérivé de x par centrage. D'où :

$$\text{Inertie ou SC de } x = \Sigma\, n_j (x^j - \overline{x})^2$$

La décomposition de x comme somme d'un protocole constant $(\overline{x})$ $j \in J$ et d'un protocole centré $(x^j - \overline{x})$ $j \in J$ est orthogonale, d'où (théorème de Pythagore) le carré de la norme de x est égal à la somme des carrés des normes de ces deux projections ; en conséquence :

$$SC = \Sigma\, n_j\ (x^j - \overline{x})^2 = \Sigma\, n_j\ (x^j)^2 - n\,\overline{x}^2\text{, où } n = \Sigma\, n_j$$

(formule dite de Huyghens).

V - COMPARAISONS SUR UN SUPPORT PONDERE.

1. Contrastes.

On appellera *contraste* sur J toute mesure c sur J dont la somme des coefficients est nulle : $\Sigma\, c_j = 0$. Une mesure c est un contraste sur J si et seulement si elle est orthogonale à toute fonction constante, donc l'ensemble des contrastes sur J est l'orthogonal (dans $\mathbb{R}_J$) du sous-espace des protocoles constants (dans $\mathbb{R}^J$) ; finalement l'espace des contrastes est le sous-espace de $\mathbb{R}_J$, à $|J| - 1$ d. ℓ., dont la représentation dans $\mathbb{R}^J$ par l'isomorphisme mesures $\mapsto$ densités est l'espace des protocoles centrés : si c est un contraste sur J, sa densité est une variable centrée, et réciproquement si x est un protocole centré la famille des totaux (x_j) $j \in J$ correspondante est un contraste.

2. Comparaisons.

On appellera *comparaison* sur J tout sous-espace de l'espace des contrastes sur J ; en particulier l'espace de tous les contrastes, à $|J| - 1$ d. ℓ., sera appelé *comparaison globale* sur J.

3. En dualité, on appellera *anti-contraste* (ou pseudo-contraste) sur J toute mesure dont la densité est constante, donc qui est proportionnelle à la mesure fondamentale ; et *anti-comparaison* (ou pseudo-comparaison) le sous-espace de $\mathbb{R}_J$, à 1 d. ℓ., des anti-contrastes sur J, engendré par la mesure fondamentale et dont la représentation dans $\mathbb{R}^J$ est l'espace des fonctions constantes. Tout contraste est orthogonal à tout anti-contraste, c'est-à-dire que la comparaison globale sur J pourrait encore être caractérisée comme le sous-espace supplémentaire orthogonal de l'anti-comparaison

Remarque importante : Les notions de "protocole constant" et de "contraste" (qui sont duales) sont des notions purement *vectorielles* en ce sens qu'elles ne font pas intervenir le produit scalaire, i.e. la pondération fondamentale par contre les notions de "protocole centré" et, en dualité, d'"anti-contraste" sont des notions *euclidiennes* car leur caractérisation fait intervenir la pondération fondamentale à laquelle est associé le produit scalaire. Dans le cas d'un protocole élémentaire (support J non-pondéré) et même dans le cas plus général où la mesure fondamentale sur J est uniforme, la dualité des notions pourrait être laissée à l'arrière-plan, parce qu'alor les mesures sont proportionnelles à leurs densités ; mais dans le cas d'une mesure fondamentale n_j quelconque la dualité est nécessaire pour éclairer à la fois les notions en jeu et les procédures de calcul.

4. Inertie associée à une comparaison.

Dans un problème d'analyse des comparaisons, le protocole x sur le support pondéré J est donné une fois pour toutes (c'est le "protocole observé") et on s'intéresse à diverses comparaisons sur J.

1°. Etant donnée une comparaison C à P degrés de liberté, on peut projeter le vecteur x sur le sous-espace C, c'est-à-dire, en fait, projeter x sur le sous-espace de protocoles centrés qui représente dans $\mathbb{R}^J$ la comparaison C, sous-espace de $\mathbb{R}_J$. Nous utiliserons le plus souvent la même lettre, par exemple C, pour désigner la comparaison elle-même et sa représentation dans l'espace des protocoles, c'est pourquoi nous pourrons dire "projeter x sur C".

L'inertie de la projection de x sur C sera alors appelée "inertie (ou somme de carrés) du protocole x relativement à la comparaison C".

2°. On appelle *carré moyen* (CM) associé à la comparaison C le rapport de la SC associée à C et du nombre de d. ℓ. de C :

$$CM_C = \frac{1}{P} SC_C.$$

5. Procédures de calcul de l'inertie associée à une comparaison C sur J.

1° Considérons tout d'abord le cas d'une comparaison à 1 d. ℓ., ou "unidimensionnelle" ; soit c_J un contraste qui l'engendre : $C = \{\lambda c_J : \lambda \in R\}$.

On vérifie aisément que la SC associée à C est donnée par la formule :

$$SC_C = \frac{(\Sigma\ c_j\ x^j)^2}{\Sigma \dfrac{c_j^2}{n_j}}$$

i.e. : le carré de la valeur obtenue en appliquant le contraste c au protocole x, divisé par le carré de la norme du contraste.

On obtiendra des formules équivalentes si au lieu d'utiliser les coefficients c_j on utilise les valeurs de la densité c^j et/ou si au lieu d'utiliser les observations x^j on utilise les totaux x_j.

Par exemple, si ce sont les valeurs c^j de la densité qui sont données ainsi que les totaux x_j, la formule sera :

$$SC_C = \frac{(\sum\ c^j\ x_j)^2}{\sum\ n_j\ (c^j)^2}$$

2° Si C est à P d. ℓ. ($P > 1$) et si l'on dispose d'une base orthogonale de C, i. e. d'une famille (c^p_J) $p \in P$ de contrastes sur J deux à deux orthogonaux engendrant l'espace C, il suffit, pour calculer SC_C, de calculer par l'une des formules précédentes la SC associée respectivement à chacune des comparaisons à 1 d.ℓ. engendrées par les contrastes lorsque p parcourt P ; en effet cette famille de comparaisons constitue une décomposition orthogonale de la comparaison C, donc les SC correspondantes s'ajoutent pour reconstituer la SC associée à C. D'où, en notant SC^p_C la SC associée à la p-ième comparaison à 1 d. ℓ., engendrée par le contraste c^p :

$$SC_C = \sum_P \frac{\left(\sum_J c^p_j x^j\right)^2}{\sum_J \frac{(c^p_j)^2}{n_j}}$$

3° Si on dispose d'une base non-orthogonale de la comparaison C : on pourrait évidemment se ramener au cas précédent en construisant à partir de cette base une base orthogonale (par un algorithme d'orthogonalisation tel que celui de Gram-Schmidt par exemple) mais la procédure de calcul la plus directe, facile à mettre en oeuvre sur ordinateur, résulte de la formule matricielle suivante :

$$SC_C = \mathbf{X}'\,\mathbf{C}\,(\mathbf{C}'\,\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\,\mathbf{C}'\,\mathbf{X}$$

où $\mathbf{X}$ est la matrice colonne (x^j) $j \in J$ (protocole) ; $\mathbf{C}$ est la matrice à P colonnes et J lignes des coefficients (c^p_j) $j \in J$, $p \in P$ des vecteurs contrastes formant la base choisie de C ; $\mathbf{N}$ est la matrice diagonale des coefficients (n_j) $j \in J$ de la mesure fondamentale ; et où le symbole "prime" indique la transposition des matrices.

Le recours à l'ordinateur s'impose ici à cause de l'inversion de la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{C}\,\mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{C}$, opération pénible à effectuer à la main si la taille de $\mathbf{M}$ (i.e. le nombre de d. ℓ. de C) n'est pas très petite.

N.B. Dans le cas où la base de C est orthogonale la matrice $\mathbf{M}$ est diagonale ; son inversion est alors immédiate et on retrouve, en explicitant le produit de matrices, la formule qui résume le mode de calcul précédent.

On obtiendra une formule de calcul équivalente en remplaçant la matrice (colonne) $\mathbf{X}$ par la matrice des totaux $\mathbf{T} = (n_j\, x^j)$ $j \in J$ et la matrice $\mathbf{C}$ par la matrice $\mathbf{D} = \left(\frac{c_j^p}{n_j}\right)$ $j \in J$, $p \in P$ des densités des contrastes ; la matrice $\mathbf{N}^{-1}$ est alors remplacée par la matrice $\mathbf{N}$ elle-même :

$$SC_C = \mathbf{T}'\,\mathbf{D}\,(\mathbf{D}'\mathbf{N}\,\mathbf{D})^{-1}\,\mathbf{D}'\mathbf{T}$$

4° Si l'on connaît la projection $\tilde{x} = (\tilde{x}^j)$ $j \in J$ du protocole x sur la comparaison C, la SC correspondante s'ensuit immédiatement puisque par définition cette SC est l'inertie totale de x, qui est un protocole centré. On aura donc :

$$SC_C = \Sigma\, n_j (\tilde{x}^j)^2$$

ou, à partir de la famille des totaux $\tilde{x}_J$ associée à $\tilde{x}^J$:

$$SC_C = \Sigma\, \frac{\tilde{x}_j^2}{n_j}$$

C'est ce mode de calcul que l'on a utilisé ci-dessus pour écrire la SC totale associée à la comparaison globale sur J ; on avait alors :

$$\tilde{x}^J = (x^j - \bar{x})\ j \in J\ ,\ \text{d'où } SC = \Sigma\, n_j (x^j - \bar{x})^2$$

5° Pour calculer la SC associée à une comparaison C on pourra souvent utiliser la propriété d'*additivité des SC* liée à la décomposition d'un sous-espace de $\mathbb{R}^J$ (ou de $\mathbb{R}_J$) comme somme (directe) de sous-espaces *orthogonaux*.

C'est ainsi que, dans la procédure de calcul présentée ci-dessus en 2°, on a utilisé la propriété qu'à toute base de contrastes orthogonaux de C (à P d. ℓ.) est associée une décomposition de C comme une somme de $|P|$ comparaisons orthogonales unidimensionnelles. Plus généralement, si $C = C_1 + C_2$, où C_1 et C_2 sont orthogonales, on aura $SC_C = SC_{C_1} + SC_{C_2}$, d'où un mode de calcul de SC_C à partir de SC_{C_1} et SC_{C_2}, ou encore, par exemple de SC_{C_2} à partir de SC_C et SC_{C_1}. Dans ce dernier cas on peut introduire la relation $SC_{C_2} = SC_C - SC_{C_1}$ comme dérivant de l'écriture $C_2 = C - C_1$, qui doit être interprétée dans le sens suivant : C_2 est *le sous-espace supplémentaire orthogonal* de C_1 par rapport à C ; on dira alors que C_2 est la comparaison *résiduelle* de C_1 par rapport à C (et de même, bien entendu, on a $C_1 = C - C_2$: C_1 est la résiduelle de C_2 par rapport à C). A la notion de comparaison "résiduelle" correspond ainsi un mode de calcul des SC "par différence" qui pourra souvent être utilisé, en relation avec des décompositions orthogonales de la comparaison globale sur J.

<u>Note sur l'utilisation des symboles "+" et "-"</u>.

Dans ce texte nous aurons à considérer la somme de sous-espaces vectoriels (et spécialement de comparaisons) presque exclusivement dans le cas où ces sous-espaces sont non seulement linéairement indépendants (somme directe mais de plus deux à deux *orthogonaux*. C'est pourquoi nous utiliserons le symbole ordinaire de l'addition (+) et le symbole de sommation sur une famille (Σ) avec la convention qu'il s'agira toujours de sommes de sous-espaces orthogonaux. Le symbole de la soustraction sera utilisé, s'agissant de sous-espaces vectoriels, pour désigner exclusivement le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace par rapport à un autre, comme on l'a dit ci-dessus.

6. <u>Illustration avec $|J| = 3$, comparaison j1, j2 j3.</u>

Si $|J| = 3$, on écrira le protocole $(x^1, n_1, x^2, n_2, x^3, n_3)$.

"Comparer" (naïvement parlant) j1 à j2 j3, c'est opposer d'une part x^1, d'autre part une valeur moyenne obtenue à partir de x^2 et x^3, donc dans la cadre le plus général de la dérivation par moyennage x^1 et $\alpha x^2 + (1-\alpha)x^3$, où α est un nombre à choisir compris entre 0 et 1 ($0 < \alpha < 1$).

La différence $x^1 - (\alpha x^2 + (1-\alpha) x^3)$

est la valeur que prend le contraste sur J de coefficients

$$(1 , -\alpha, -(1-\alpha))$$

appliqué à la variable

$$(x^1 , x^2 , x^3)$$

La SC associée à la comparaison (à 1 d. ℓ.) engendrée par ce contraste est égale à :

$$\frac{[x^1 - (\alpha x^2 + (1-\alpha) x^3)]^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{\alpha^2}{n_2} + \frac{(1-\alpha)^2}{n_3}}$$

Elle est nulle si et seulement si :

$$x^1 = \alpha x^2 + (1-\alpha) x^3$$

La notion de "comparaison j1, j2 j3" n'est donc sans équivoque qu'une fois choisie la pondération $(\alpha , 1-\alpha)$. Comment choisir cette pondération ?

Dans l'exemple des températures avec $|J| = 3$, il apparaîtra dans doute assez raisonnable de prendre la pondération définie par la mesure-effectifs, laquelle ici consiste à prendre :

$$\alpha = \frac{n_2}{n_2 + n_3} \quad , \quad 1 - \alpha = \frac{n_3}{n_2 + n_3}$$

C'est-à-dire à choisir le contraste $(1 \, , \, \frac{-n_2}{n_2 + n_3} \, , \, \frac{-n_3}{n_2 + n_3})$ (ou tout contraste proportionnel), ce que nous appellerons la *procédure pondérée* (s.e. par rapport aux effectifs) ;

d'où la SC :

$$SC = \frac{\left(x^1 - \frac{n_2 \, x^2 + n_3 \, x^3}{n_2 + n_3} \right)^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{n_2^2/(n_2+n_3)^2}{n_2} + \frac{n_3^2/(n_2+n_3)^2}{n_3}} = \frac{\left(x^1 - \frac{n_2 \, x^2 + n_3 \, x^3}{n_2 + n_3} \right)^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2 + n_3}}$$

Mais dans d'autres situations, un autre choix pourra apparaître comme éventuellement préférable, par exemple, celui de la *procédure équipondérée*, consistant à prendre :

$$\alpha = \frac{1}{2} = 1 - \alpha$$

c'est-à-dire le contraste $(1 \, , \, -\frac{1}{2} \, , \, -\frac{1}{2})$ (ou tout contraste proportionnel)

d'où la $\quad SC = \dfrac{(x^1 - \frac{x^2 + x^3}{2})^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1/4}{n_2} + \frac{1/4}{n_3}}$

Pratiquement, l'écart entre les deux SC peut être assez grand (dans le "mauvais cas" où x^1 serait compris entre x^2 et x^3, l'une peut être nulle sans que l'autre le soit). Bien entendu, les deux procédures coïncident lorsque $n_2 = n_3$.

VI - INERTIE RELATIVE A UNE COMPARAISON SUR UN SUPPORT DERIVE.

Jusqu'à présent nous avons considéré le cas d'une comparaison sur J caractérisée comme sous-espace de $\mathbb{R}_J$, ce qui nous a permis de définir puis de calculer l'inertie associée à cette comparaison, en projetant le protocole x^J sur le sous-espace de $\mathbb{R}^J$ qui la représente. Mais souvent on aura à considérer le cas de comparaisons qui sont définies intrinsèquement non pas comme espaces de mesures sur J mais comme espaces de mesures sur un *support dérivé de* J.

Soit K un tel support : K est un *ensemble indexant une famille de parties deux à deux disjointes de* J. On notera J(k) la partie de J indexée par k, donc la famille de parties s'écrit :

$$\{J(k) : k \in K\}.$$

D'autre part, on notera $J°$ la réunion des parties J(k) pour $k \in K$; donc $J° = J$ si la famille $\{J(k) : k \in K\}$ est une partition de J.

<u>Remarque</u> : Si J est considéré comme un *facteur* du protocole x^J (ou d'un protocole fondamental dont x^J est lui-même dérivé) c'est-à-dire si J a le statut de descripteur associé à un *plan* du protocole, le support dérivé K sera un facteur *composant* de J (si $J° = J$) ou un facteur *composant partiel* de J (si $J°$ est une partie stricte de J).

La donnée du support J et d'un support K dérivé de J, i.e. d'une partition $\{J(k) : k \in K\}$ d'une partie $J°$ de J, définit une structure d'analyse que nous appellerons *emboîtement sur* J. On notera $J° < K >$ l'ensemble $\{(j,k) : j \in J(k),\ k \in K\}$, graphe de la surjection $J° \rightarrow K$ associé à la partition de $J°$, et on dira "l'emboîtement $J° < K >$". Si nécessaire on distinguera le cas d'un emboîtement strictement partiel ($J°$ est une partie stricte de J) et celui d'un emboîtement total ($J° = J$), mais ce qui suit s'appliquera le plus souvent aux deux cas, en particulier la notation $J° < K >$.

Nous considérons alors une comparaison C qui nous est donnée comme espace de contrastes sur K, donc comme sous-espace de l'espace $\mathbb{R}_K$ des mesures sur K, et nous cherchons à définir (puis à calculer) l'inertie du protocole x (sur J) associée à cette comparaison. Dans ce chapitre nous allons tout d'abord définir des procédures conduisant à une solution unique *pourvu que l'on considère la mesure fondamentale* n_J *comme fixée*, ce qui nous amènera à énoncer un théorème d'équivalence entre les comparaisons sur K et une certaine classe de comparaisons sur J. Puis nous envisagerons une construction plus générale, conduisant à des solutions que l'on pourra interpréter comme des transformations de la mesure fondamentale sur J.

1. Dérivation de J vers K.

1° La dérivation par moyennage, qui est la dérivation naturelle pour les variables, nous permet de construire immédiatement un protocole sur K dérivé du protocole x^J sur J ; en effet, à toute partie J(k) de J, donc à tout élément k de K, cette dérivation associe la moyenne du sous-protocole (x^j) $j \in J(k)$, soit :

$$x^k = \frac{\sum_{J(k)} n_j \, x^j}{\sum_{J(k)} n_j}$$

D'où le protocole dérivé de support K (dont nous envisagerons plus loin la pondération) : $x^K = (x^k)$ $k \in K$

On remarque alors que la dérivation $x^J \mapsto x^K$ ainsi définie est l'application linéaire de $\mathbb{R}^J$ dans $\mathbb{R}^K$ associée à la *transition de conditionnement* de la mesure n_J par la surjection $J° \to K$ (cf. Annexe, 2ème partie). En effet, notons n_k la somme $\sum_{J(k)} n_j$ et f^k_J la mesure normale sur J définie par

$$f^k_j = \frac{n_j}{n_k} \quad \text{si } j \in J(k), \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

La famille $f^K_J = (f^k_J)$ $k \in K$ est la transition de conditionnement de la mesure n_J par la famille J(k) $(k \in K)$, i.e. par l'application $J° \mapsto K$.
La moyenne dérivée x^k s'écrit :

$$x^k = \sum_J f^k_j \, x^j$$

(la sommation pourrait être limitée à J(k) mais elle peut aussi être étendue à J tout entier puisque f^k_j est nul en dehors de J(k)) et la procédure de dérivation $x^J \mapsto x^K$ s'écrit :

$$x^K = (\sum_J f^k_j \, x^j) \; k \in K.$$

2° La dérivation par sommation, qui est la dérivation naturelle pour les mesures, permet de construire immédiatement une mesure sur K dérivée de la mesure fondamentale n_J sur J ; en effet, à toute partie J(k) de J, donc à tout élément k de K, cette dérivation associe la valeur, déjà définie, $n_k = \sum_{J(k)} n_j$. D'où la mesure :

$$n_K = (n_k) \; k \in K.$$

On remarque alors que l'application linéaire $\mathbb{R}_J \to \mathbb{R}_K$ qui définit la dérivation $n_J \to n_K$ n'est autre que le *transport des mesures* par la surjection $J° \to K$ (plus précisément, la dérivation $\mathbb{R}_J \to \mathbb{R}_K$ est la composée de la restriction de J à $J°$: $\mathbb{R}_J \to \mathbb{R}_{J°}$, et du transport de $J°$ vers K : $\mathbb{R}_{J°} \to \mathbb{R}_K$ par $J° \to K$).

3° Prenant alors la variable dérivée x^K comme protocole sur le support K pondéré par la mesure fondamentale dérivée n_K nous sommes ramenés, pour la définition et le calcul de la SC associée à la comparaison C sur K, à la construction du chapitre précédent, moyennant un simple changement d'indices (on a remplacé J par K) : on projette x^K sur le sous-espace de $\mathbb{R}^K$ représentant la comparaison C, et la SC_C est l'inertie de cette projection. Par exemple, on aura, pour la SC associée à la comparaison globale sur K :

$$SC = \sum_K n_k (x^k - \bar{x})^2, \text{ où } \bar{x} = \frac{\Sigma\, n_k\, x^k}{\Sigma\, n_k} \quad ; \text{ etc.}$$

2. <u>Remontée de K vers J associée à n_J</u>.

Au lieu de dériver protocoles et mesures de J vers K, nous pouvons nous proposer de construire dans $\mathbb{R}_J$ une représentation de la comparaison C, sous-espace de $\mathbb{R}_K$. De nouveau nous serons ramenés à la construction précédente puisqu'alors C serait définie comme une comparaison sur J.

1° Pour définir une procédure de "remontée" des contrastes sur K en des contrastes sur J, nous pouvons utiliser à nouveau la transition de conditionnement f_J^K de la mesure n_J par la surjection $J° \to K$ qui nous a servi à dériver les protocoles de J vers K. En effet, à la mesure u_K, la transition de conditionnement f_J^K associe la mesure u_J définie par :

$$\begin{cases} u_j = f_j^k\, u_k & \text{si } j \in J(k) \\ u_j = 0 & \text{si } j \in J - J° \end{cases}$$

Cette remontée des mesures sur K en des mesures sur J par la transition f_J^K est une application linéaire $\mathbb{R}_K \to \mathbb{R}_J$ qui conserve la mesure (puisque $\sum_{J(k)} u_j = u_k \sum_{J(k)} f_j^k = u_k$), donc qui remonte un contraste sur K en un contraste sur J.

On peut caractériser cette procédure en disant que le poids u_k qui affecte l'élément k de K est *réparti* sur l'ensemble des éléments j de la partie J(k) *proportionnellement* aux coefficients n_j de la mesure n_J sur cette partie.

On remarquera que la remontée des mesures $\mathbb{R}_K \to \mathbb{R}_J$ et la dérivation des fonctions $\mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^K$ qui sont toutes deux associées à la transition de conditionnement f_J^K de la mesure n_J par la surjection $J° \to K$ sont deux applications linéaires *transposées* l'une de l'autre.

2° On peut aussi définir une procédure de remontée des fonctions sur K en des fonctions sur J, ou du moins, tout d'abord, en des fonctions sur J°. En effet soit $z^K : K \to \mathbb{R}$ une fonction sur K ; en la composant avec la surjection $J° \to K$ on obtient la fonction $J° \to \mathbb{R}$ définie par :

$$z_j = z_k \quad \text{pour tout } j \in J(k)$$

La fonction $j \mapsto z_j$ n'est donc pas définie si $j \in J - J°$. Mais s'agissant de la remontée des *densités* de mesures sur K, on étendra la remontée sur J° en une fonction sur J, en posant : $z_j = 0$ si $j \in J - J°$, ce qui assure la compatibilité de cette procédure avec la remontée des mesures.

On remarque alors que la remontée des densités : $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^J$ et le transport des mesures : $\mathbb{R}_J \to \mathbb{R}_K$, procédures toutes deux liées à la surjection $J° \to K$, sont encore deux applications linéaires transposées l'une de l'autre.

3° Enfin, on vérifiera que les procédures de dérivation de J vers K et de remontée de K vers J sont compatibles avec les isomorphismes mesures $\mapsto$ densités (sur J et sur K) et leurs réciproques. Par exemple, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_K \arrow[r, "\text{remontée des}", "\text{mesures}"'] \arrow[d] & \mathbb{R}_J \\
\mathbb{R}^K \arrow[r, "\text{remontée des}", "\text{densités}"'] & \mathbb{R}^J \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif : en associant à une mesure u_K sa densité, puis la remontée de cette densité, puis la mesure sur J dont cette remontée est la densité, on obtiendra la mesure u_J définie par :

$$\begin{cases} u_j = \dfrac{n_j}{n_k} u_k = f_j^k u_k, & \text{si } j \in J(k) \\ u_j = 0, & \text{si } j \in J - J^\circ \end{cases}$$

qui est bien la remontée de u_K par l'application linéaire $\mathbb{R}_K \to \mathbb{R}_J$.

<u>N.B</u>. Bien entendu, le support K est désormais muni de la mesure fondamentale n_K, mesure-image de la mesure n_J par l'application $J^\circ \to K$.

<u>Remarque</u> : La remontée des densités $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^J$ et le transport des mesures $\mathbb{R}_J \to \mathbb{R}_K$ sont des procédures liées exclusivement à la structure d'emboîtement $J^\circ < K >$, i.e. à la surjection $J^\circ \to K$; par contre, la dérivation des fonctions $\mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^K$ et la remontée des mesures $\mathbb{R}_K \to \mathbb{R}_J$ sont liées à la transition de conditionnement de la mesure n_J par la surjection $J^\circ \to K$, donc *à la fois* à la structure d'emboîtement $J^\circ < K >$ et à la mesure fondamentale n_J sur J ou, plus précisément, à la classe d'équivalence des mesures sur J ayant même conditionnement par la surjection $J^\circ \to K$. Les conséquences de cette remarque seront exploitées dans le chapitre suivant.

4° La remontée $\mathbb{R}_K \to \mathbb{R}_J$ est un homomorphisme injectif pour la structure euclidienne, c'est-à-dire qui conserve le produit scalaire et la norme (par exemple, on vérifiera que le produit scalaire de la remontée sur J de deux mesures sur K est égal au produit scalaire de ces mesures). Si donc, ayant remonté une comparaison C sur K (i.e. l'ensemble des contrastes de cette comparaison) en une comparaison $\hat{C}$ sur J, on calcule (dans $\mathbb{R}^J$) l'inertie du protocole x^J relative à $\hat{C}$, on obtiendra la même valeur que celle obtenue précédemment en calculant (dans $\mathbb{R}^K$) l'inertie du protocole dérivé x^K relative à la comparaison C.

En résumé, le résultat auquel nous sommes parvenus est le suivant :

Soit x un protocole sur le support pondéré J muni de la mesure fondamentale n_J, K un support dérivé de J et C une comparaison sur K (sous-espace de $\mathbb{R}_K$).

(1) On peut dériver par moyennage le protocole x^J en un protocole x^K sur K, et dériver par sommation la mesure fondamentale n_J en une mesure fondamentale n_K sur K. D'où une première SC relative à C : l'inertie de la projection de x^K sur le sous-espace de R^K représentant C.

(2) On peut représenter la comparaison C dans l'espace $\mathbb{R}_J$ (puis dans l'espace $\mathbb{R}^J$) par la procédure de remontée associée à la transition de conditionnement de la mesure n_J par la surjection $J° \rightarrow K$, d'où une seconde SC relative à C : l'inertie de la projection de x sur le sous-espace de $\mathbb{R}^J$ représentant C.

THEOREME D'EQUIVALENCE : Quelle que soit la comparaison C, ces deux sommes de carrés sont égales.

Cette équivalence nous permettra d'assimiler toute comparaison "sur K" (au sens de "espace de contrastes sur K") à une sous-comparaison de la comparaison globale sur J. On pourra parler par exemple, de "la comparaison K" (i.e. la comparaison globale sur K: on désignera par la même lettre un support et la comparaison globale sur ce support) sans préciser dans quel espace : $\mathbb{R}_K$ ou $\mathbb{R}_J$ on se situe.

Il est donc intéressant de caractériser les *contrastes sur* J *qui sont des contrastes sur* K, i.e. qui sont la remontée de contrastes sur K. Il résulte de la définition de la procédure de remontée qu'un contraste sur J est un contraste sur K si et seulement s'il est porté par J° et si sa *restriction à chacune des parties* J(k) *est un anti-contraste sur cette partie* ; ou encore ce qui est équivalent, si sa *densité est constante sur chaque partie* J(k) et nulle en dehors de J°.

Remarque : On peut vérifier que la remontée des mesures par la transition de conditionnement de n_J par la surjection $J° \rightarrow K$ est l'homomorphisme *unique* de $\mathbb{R}_K$ vers $\mathbb{R}_J$ qui soit compatible avec l'emboîtement $J° \prec K \succ$ et qui conserve la mesure et le produit scalaire. En ce sens la construction que nous avons effectuée est *sans arbitraire* si l'on entend (ce qui va de soi) assurer la compatibilité des procédures de dérivation de J vers K et des procédures de remontée de K vers J. Le seul arbitraire relatif réside dans le choix de la mesure fondamentale sur J, comme nous le verrons dans le chapitre ci-dessous.

3. Généralisation : remontée associée à une transition de K vers J.*

1° Ainsi que nous l'avons remarqué, les deux procédures $\mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}_K \rightarrow \mathbb{R}_J$ précédentes ne font intervenir la mesure n_J qu'à travers son conditionnement par l'application $J° \rightarrow K$. Pour définir de telles

---

* La lecture de ce paragraphe 3 n'est pas nécessaire à la compréhension de la suite du texte.

procédures il suffit en fait que nous nous donnions une *transition* $K \prec J$ *mpatible avec l'emboîtement* $J° < K >$ (i.e. avec la surjection $J° \to K$). choix de *la* transition de conditionnement de la mesure n_J peut constiuer du point de vue méthodologique une option privilégiée mais non bligatoire.

Ious définirons donc une solution plus générale au problème posé (détermination de l'inertie relative à une comparaison C sur K) si nous choisissons, indépendamment de la mesure n_J, une transition φ_J^K compatible avec l'emboîtement c'est-à-dire telle que, pour chaque $k \in K$, la mesure normale φ_J^k associée à k est portée par la partie $J(k)$.

Nous noterons alors y^K le protocole de support K dérivé du protocole x^J par la transition φ_J^K ; soit :

$$y^K = (\Sigma \varphi_j^k \, x^j) \quad k \in K$$

Soit c_K un contraste sur K ; sa remontée sur J sera donnée par :

$$\begin{cases} c_j = \varphi_j^k \, c_k & \text{si } j \in J(k) \\ c_j = 0 & \text{si } j \in J - J° \end{cases}$$

Calculons l'inertie du protocole x^J relative à la comparaison C (à 1 d. ℓ.) engendrée par le contraste c_J ainsi défini :

$$SC_C = \frac{(\Sigma\, c_j\, x^j)^2}{\Sigma\, c_j^2/n_j} = \frac{(\sum_K \sum_{J(k)} c_k\, \varphi_j^k\, x^j)^2}{\sum_K \sum_{J(k)} c_k^2\, \varphi_j^{k^2}/n_j} = \frac{(\sum_K c_k\, y^k)^2}{\sum_K c_k^2 \sum_{J(k)} \varphi_j^{k^2}/n_j}$$

Seul le terme $\sum_{J(k)} \varphi_j^{k^2}/n_j$ fait intervenir l'indice j. Posons alors :

$$\sum_{J(k)} \varphi_j^{k^2}/n_j = \frac{1}{\nu_k}$$

D'où :

$$SC_C = \frac{(\sum_K c_k\, y^k)^2}{\sum_K c_k^2/\nu_k}$$

c'est-à-dire que la SC apparaît comme l'inertie relative à C du protocole y^K (dérivé par la transition φ_J^K), le support K étant muni de la mesure fondamentale ν_K définie par :

$$\nu_k = \frac{1}{\sum\limits_{J(k)} {\varphi_j^k}^2 / n_j}$$

Mais puisque la remontée des mesures $\mathbb{R}_K \rightarrow \mathbb{R}_J$ est définie par la transition φ_J^K, nous pouvons maintenant utiliser cette procédure pour remonter la mesure fondamentale ν_K ; nous obtenons alors la mesure ν_J donnée par :

$$\nu_j = \varphi_j^k \nu_k = \frac{\varphi_j^k}{\sum\limits_{J(k)} {\varphi_j^k}^2 / n_j} \qquad \text{si } j \in J(k)$$

Il est alors immédiat de vérifier que l'inertie du protocole x^J relative à C (remontée par la transition φ_J^K), le support J étant muni de la mesure fondamentale ν_J, est celle que nous venons de calculer (c'est-à-dire qu'il y a équivalence des mesures n_J et ν_J pour l'inertie relative à C). Enfin, par construction, la transition φ_J^K est la transition de conditionnement de la mesure ν_J par la surjection $J° \rightarrow K$, et la mesure ν_K est l'image de la mesure ν_J par cette même surjection. Donc tout ce qui précède peut être résumé en disant que la transition φ_J^K induit une *transformation de la mesure* n_J en la mesure ν_J définie par

$$\nu_j = \frac{\varphi_j^k}{\sum\limits_{J(k)} {\varphi_j^k}^2 / n_j} \quad \text{si } j \in J(k) \text{ , } 0 \text{ si } j \in J - J°.$$

Une fois cette transformation effectuée, les procédures de dérivation et de remontée sont celles définies au chapitre précédent et la SC relative à une comparaison C sur K s'ensuit, le théorème d'équivalence continuant à s'appliquer.

Nous appellerons *transformation φ-harmonique* la transformation de la mesure n_J induite par la transition φ_J^K.

2° Solutions privilégiées.

(1) Transformation identique.

Si nous prenons $\varphi_J^K = f_J^K$, transition de conditionnement de n_J par l'emboîtement $J°\langle K \rangle$, la transformation $n_J \rightarrow \nu_J$ est la transformation identique et nous retrouvons la solution précédente. Nous appellerons *pondérée* cette solution, parce qu'elle consiste à prendre les coefficients φ_j^k proportionnels aux coefficients de la mesure n_J sur chaque partie J(k). Le caractère éventuellement privilégié de cette solution réside dans ce respect des poids relatifs dont sont affectés au départ les éléments de J.

(2) Transformation harmonique.
Une autre solution privilégiée consiste à pondérer *également* les éléments de J, sur chaque partie J(k), i.e. à prendre la transition que nous dirons *équipondérée* : $\varphi_j^k = \frac{1}{J(k)}$ pour tout $j \in J(k)$ (on écrira J(k) pour $|J(k)|$).

Le coefficient ν_j est alors égal à :

$$h_j = \frac{1}{\sum\limits_{J(k)} \frac{1}{n_j} / J(k)} \quad \text{si } j \in J(k)$$

c'est-à-dire est la moyenne harmonique (inverse de la moyenne des inverses) des coefficients $n_j (j \in J(k))$.

On appellera *mesure harmonique* associée à n_J pour l'emboîtement $J°< K >$ la mesure h_J ainsi définie, et on dira que la solution correspondante est *équipondérée* puisque les moyennes dérivées y^k sont alors les moyennes simples ou équipondérées des valeurs $(x^j)\ j \in J\ (k)$:

$$y^K = \left(\sum_{J(k)} \frac{x^j}{J(k)} \right) k \in K$$

3° Lorsque la mesure initiale n_J est *uniforme* sur chaque partie J(k), les deux solutions : pondérée et équipondérée, coïncident. Ce sera notamment le cas si J et K sont deux *facteurs* d'un plan du protocole x (avec la relation d'emboîtement J < K >) et si ce plan est *équilibré* (c'est-à-dire s'il est tel que les mesures fondamentales sur *chacun* des facteurs du plan sont uniformes).

Dans ce cas - ou, plus généralement, si la mesure n_J est uniforme sur chaque partie J(k) *et* si l'emboîtement $J°< K >$ est équilibré - on peut utiliser, pour la remontée des comparaisons de K vers J, une procédure que nous appellerons *remontée élémentaire* *, qui consiste à remonter

* C'est cette procédure qui était définie dans l'article de Mathématiques et Sciences Humaines de 1968.

les mesures de la même façon que les densités : si c_K est un contraste sur K on lui associera le contraste sur J défini par : .

$$\begin{cases} c_j = c_k & \text{si } j \in J(k) \\ c_j = 0 & \text{si } j \in J - J° \end{cases}$$

effet, comme les mesures sont alors proportionnelles à leur densité, remontée d'une comparaison C sur K par cette procédure élémentaire ra bien égale à la remontée de C par la transition de conditionnement . La remontée élémentaire ne *conserve pas la mesure*, mais ce fait est ıns importance si l'on n'a à calculer que l'*inertie* relative à une comaraison sur K, puisque cette inertie dépend de l'espace considéré mais non u choix des contrastes que l'on utilise (si besoin est) pour la calculer.

. Comparaisons entre parties sur un support.

a construction qui précède nous amène à caractériser une classe de comparaisons sur J, les comparaisons "entre parties", indépendamment de la donnée a priori d'un emboîtement particulier J°< K >.

On dira qu'une comparaison C sur J est une comparaison *entre parties* de J s'il existe une famille de parties disjointes de J, indexée par K, telle que C soit la remontée sur J de la comparaison globale sur K, à K - 1 d. ℓ.

Il résulte de la caractérisation de la remontée des contrastes que la comparaison entre les parties J(k) ($k \in K$) est l'espace des contrastes portés par J° qui sont des anticontrastes sur chaque partie J(k). Il convient donc de souligner que la comparaison K *dépend* de la mesure fondamentale n_J sur J, en tant que comparaison sur J (entre parties) mais ne *dépend pas* de la mesure fondamentale n_K sur K, en tant que comparaison globale sur le support dérivé K.

VII - DECOMPOSITIONS LIEES A UN EMBOITEMENT : COMPARAISONS INTER ET INTRA.

Considérons à nouveau la donnée d'un support pondéré J et d'un support K dérivé de J, i. e. un emboîtement J°< K >, la mesure fondamentale n_J sur J étant fixée.

1. On appellera *contraste (resp. comparaison) INTER* (sous-entendu : par rapport à l'emboîtement $J° < K >$; s'il est nécessaire de préciser on dira *inter*-K) tout contraste (resp. toute comparaison) sur J qui est la remontée d'un contraste (resp. d'une comparaison) sur K. En particulier la comparaison *entre parties* K est la comparaison inter *maximum*, donc on peut caractériser aussi les comparaisons inter comme les sous-comparaisons (sous-espaces de contrastes) de la comparaison K.

2. On dira qu'un contraste sur J est un *contraste INTRA* (ou intra-K s'il est nécessaire de préciser) s'il est porté par J° et si la restriction à *chacune* des parties J(k) est un contraste sur cette partie. Donc c_J est un contraste intra si :

$$\begin{cases} c_j = 0 \text{ si } j \in J - J' \\ \text{pour tout } k \in K : \sum_{J(k)} c_j = 0 \end{cases}$$

On appellera donc comparaison intra tout espace de contrastes intra.

3. Tout contraste intra est orthogonal à tout contraste inter : cette propriété résulte immédiatement de ce que tout contraste sur un support est orthogonal aux anticontrastes sur ce support. Or par définition un contraste intra est un contraste sur chaque partie J(k), un contraste inter est un anticontraste sur chaque partie J(k) , donc le produit scalaire de deux tels contrastes est nul.

<u>Conséquence</u> : Toute comparaison intra est orthogonale à toute comparaison inter.

4. On dira qu'un contraste intra est un contraste *intra*-k s'il est porté par la partie J(k) de J ; d'où la notion de comparaison intra-k. En particulier la comparaison intra-k maximum à J(k) - 1 d. ℓ. est la comparaison globale sur le support J(k), qui sera notée également J(k) ; considérée comme une comparaison sur J il s'agit encore d'une comparaison entre parties de J, dans le cas particulier où les parties considérées - en l'occurrence les parties {j} pour $j \in J(k)$ - sont toutes à 1 seul élément.

5. Soit k' et k" deux éléments de K. Tout contraste intra-k' est orthogonal à tout contraste intra-k" puisque les supports de deux tels contrastes sont disjoints. Donc si (C_k) $k \in K'$ est une famille de comparaisons respectivement intra-k pour k parcourant K' (où K' est une partie de K), les comparaisons C_k sont mutuellement orthogonales. En particulier la famille de comparaisons intra-k maximum : $(J(k))$ $k \in K'$ est une famille orthogonale et la somme de cette famille : $\sum_{K'} J(k)$ est une comparaison intra que l'on notera $J(K')$. En faisant $K' = K$ on obtient la comparaison intra maximale notée $J(K)$, dont la famille $(J(k))$ $k \in K$ constitue une décomposition orthogonale.

6. Il résulte des propriétés précédentes que la comparaison globale sur le support $J°$ - comparaison que l'on écrira $J°$ ou encore $J°< K >$ car les supports $J°$ et $J°< K >$ se correspondent terme à terme - se décompose orthogonalement comme somme de la comparaison inter maximum K et de la comparaison intra maximum $J(K)$, soit :

$$J°< K > = K + J(K)$$

d'où les propriétés d'additivité que l'on pourra utiliser pour le calcul de l'une ou l'autre des inerties correspondantes. La relation ci-dessus permet de démontrer sans calculs la propriété :

$$SC_{J°<K>} = SC_K + SC_{J(K)} \quad (\text{où } SC_{J(K)} = \sum_K SC_{J(k)}) \text{ , soit :}$$

$$\sum_{J°} n_j \; (x^j - \overline{x})^2 = \sum_K n_k \; (x^k - \overline{x})^2 + \sum_K \sum_{J(k)} n_j \; (x^j - x^k)^2$$

(où $\overline{x}$ est la moyenne sur $J°$: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{J°} n_j \; x^j}{\sum_{J°} n_j} = \dfrac{\sum_K n_k x^k}{\sum_K n_k}$).

Ce que l'on résume par l'expression :

$$SC \text{ totale} = SC \text{ inter} + SC \text{ intra.}$$

Dans le cas où J et K ont le statut de facteurs (ou facteurs partiels) du protocole x, la comparaison K est dite relative à l'"effet principal global" du facteur K et la comparaison J(K) est dite relative à l'"effet résiduel de J à l'intérieur de K".

Remarque : Les notions de contrastes et de comparaisons INTRA ne font pas intervenir la mesure fondamentale sur J, contrairement à celles de contrastes et de comparaisons INTER qui ont été définies à partir de la remontée des contrastes (de K vers J). On pourrait également caractériser les contrastes inter comme les contrastes orthogonaux aux contrastes intra, ce qui ferait de nouveau apparaître le rôle joué par la mesure n_J, en tant que pondération à laquelle est liée l'orthogonalité.

VIII - DECOMPOSITIONS LIEES A UN CROISEMENT : CONDITIONNEMENTS ET INTERACTIONS.

1. Considérons maintenant le cas où le support J du protocole pondéré x peut être identifié au produit cartésien de deux supports dérivés K et L :

$$J = K \times L$$

On dira que J est un *croisement* et, représentant celui-ci par un tableau à L lignes et K colonnes, on désignera par la notation particulière L/k la partie J(k) de J qui est aussi la partie $L \times \{k\}$ du produit $K \times L$, ou en bref "la colonne k du tableau". Le choix de la notation L/k est motivé par la propriété suivante : si on *fixe* K à sa modalité k, la partie de J correspondante : $J(k) = L \times \{k\}$ est indexée par L, et il y a lieu d'attirer l'attention sur le fait que le *protocole dérivé* $x^L = (x^\ell)\ell \in L$ et le *sous-protocole* $x^{L/k} = (x^{k\ell})\ell \in L$ ont *le même support* L.

Symétriquement, on notera K/ℓ la "ligne ℓ" du tableau, c'est-à-dire la partie $J(\ell) = K \times \{\ell\}$ de J.

2. Tout d'abord nous pouvons spécialiser à la présente situation ce qui a été dit précédemment dans le cas d'un emboîtement quelconque, c'est-à-dire étudier les comparaisons inter et intra liées aux deux emboîtements $J < K >$ et $J < L >$; mais tout de suite de nouvelles propriétés vont apparaître, en raison de la structure de croisement.

1° Considérons par exemple l'emboîtement $J < L > = (K \times L) < L >$. La surjection $J° \to L$ associée à l'emboîtement est ici la projection (cartésienne) du produit $K \times L$ sur sa composante L et chaque partie $J(\ell) = K/\ell$ est indexée par le support dérivé K ainsi que nous l'avons remarqué. Il en résulte une correspondance canonique entre les comparaisons sur K (support dérivé) et les comparaisons sur K/ℓ (partie du support J) qui sont les comparaisons *intra*-ℓ. Ainsi, étant donnée une comparaison V sur K il lui correspond la comparaison intra-ℓ (portée par K/ℓ) qui sera notée V/ℓ et qui peut être caractérisée de la manière suivante en tant qu'espace de contrastes sur J :

$$V/\ell = \{c_K \times \delta_L^\ell : c_K \in V\}$$

à chaque contraste c_K de V on fait correspondre le contraste sur $J = K \times L$ qui est le produit de c_K par la mesure de Dirac sur L au point ℓ, i.e. $c_K \times \delta_L^\ell = (c_k \times \delta_{\ell'}^\ell)\ k \in K\ ,\ \ell' \in L$ où $\delta_{\ell'}^\ell = 1$ si $\ell' = \ell$ et 0 sinon (cf. Annexe, 1ère partie).

2° On prendra garde cependant à ce que cette correspondance $V \to V/\ell$ peut avoir de fallacieux, compte tenu des propriétés *qui dépendent de la mesure fondamentale* : en ce qui concerne les comparaisons V, ces propriétés sont liées à la mesure n_K sur le support dérivé K (n_K est la mesure-image de la mesure n_J par la projection $K \times L \to K$), et en ce qui concerne les comparaisons V/ℓ ces propriétés sont liées à la restriction sur K/ℓ de la mesure n_J : $(n_j)\ j \in J(k) = (n_{k\ell})\ k \in K$. Si donc la mesure n_J est quelconque les propriétés des comparaisons V et V/ℓ peuvent ne pas se correspondre ; par exemple le fait que V soit une comparaison entre parties (de K) n'entraînera pas que V/ℓ soit une comparaison entre parties (de K/ℓ) ; etc.. Si on recherche une condition sous laquelle la correspondance $V \mapsto V/\ell$ *conserve* toutes les propriétés des comparaisons qui dépendent de la mesure fondamentale on voit qu'une telle condition sera que les mesures n_K et $n_{K/\ell} = (n_{k\ell})\ k \in K$ soient *proportionnelles*. Nous retrouverons plus loin cette condition sur la mesure n_J, à partir d'autres considérations.

3° Soit L' une partie de L. A partir des comparaisons intra-ℓ V/ℓ pour $\ell \in L'$, qui sont orthogonales (leurs supports étant disjoints) nous pourrons former la somme $\sum_{L'} V/\ell$, comparaison intra-L qui sera notée V(L') ; nous généralisons ainsi l'usage de la *parenthèse* introduit précédemment dans le cas d'un emboîtement quelconque. En particulier, si V est la comparaison globale sur K on obtient $K(L') = \sum_{L'} K/\ell$ (somme des comparaisons globales sur les parties K/ℓ, pour $\ell \in L'$) et en faisant L' = L, on obtient $K(L) = \sum_{L} K/\ell$ qui est la comparaison intra-L maximum J(L). Si K et L ont le statut de facteurs dans un plan du protocole x, on dira que la comparaison K(L) est relative à l'effet global du facteur K *à l'intérieur* du facteur L.

4° Symétriquement, étant donnée une comparaison W sur L, on pourra définir la comparaison intra-k W/k par :

$$W/k = \{c_\ell \times \delta_K^k : c_\ell \in W\}$$

puis les comparaisons $W(K') = \sum_{K'} W/k$, L/k, L(K') et enfin L(K), comparaison intra-K maximum, relative à l'effet global du facteur L à l'intérieur du facteur K.

<u>Remarque</u> :On peut donner un sens à l'écriture $V(\ell)$ (et symétriquement à W(k)), interprétée comme une somme à un seul terme : si L' se réduit à $\{\ell\}$: $V(L') = \sum_{L'} V/\ell = V(\ell) = V/\ell$.
Les deux formules V/ℓ et $V(\ell)$ sont deux écritures équivalentes pour la comparaison intra-ℓ (portée par K/ℓ) correspondant à V. Mais, comme on le verra ci-dessous, cette équivalence ne se généralise pas : si $|L'| > 1$, les comparaisons V(L') et V/L' sont distinctes.

5° Par rapport à l'emboîtement $J < L > = (K \times L) < L >$, la comparaison inter maximum est la comparaison L, cependant que la comparaison intra maximum s'écrit K(L) ainsi qu'on vient de le montrer.

D'où la décomposition inter-intra de la comparaison globable sur $J = K \times L$

$$K \times L = L + K(L) = L + \sum_{L} K/\ell$$

Symétriquement, la décomposition associée à l'emboîtement $J < K > = (K \times L) < K >$ s'écrit :

$$K \times L = K + L(K) = K + \sum_{K} L/k$$

Nous étudierons plus loin la relation entre les comparaisons K et K(L) d'une part, L et L(K) d'autre part.

3. Conditionnements.

1° Soit L' une partie de L. Généralisant la notation V/ℓ on désignera par V/L' la comparaison V (sur K) *conditionnelle* à la partie L' (lire "V si L'" ou "V pour L'"), qui peut être caractérisée de deux manières un peu différentes, quoique équivalentes à certains égards.

1er point de vue : celui de la *restriction*. Considérons la restriction à $J' = K \times L'$ du protocole x de support $J = K \times L$:

$$x' = (x^j)\ j \in K \times L'$$

Soit V une comparaison sur K (sous-espace de R_K). L'inertie du protocole x' relativement à V sera définie, conformément au théorème d'équivalence, soit à partir de la dérivation de x' en un protocole $(x'^k)\ k \in K$, où

$x'^k = \dfrac{\sum_{L'} n_{k\ell}\, x^{k\ell}}{\sum_{L'} n_{k\ell}}$, soit à partir de la remontée des contrastes $c_K \in V$ sur $J' = K \times L'$ par la transition de conditionnement $K \prec K \times L'$ de la mesure n_J par la projection $K \times L' \to K$.

2ème point de vue : celui du *conditionnement*. L'inertie de x' relativement à V peut aussi être considérée comme l'inertie de x relativement à la comparaison sur K × L notée V/L' définie de la manière suivante : chaque contraste c_K remonté sur K × L' par la transition $K \prec K \times L'$ est ensuite étendu en un contraste sur K × L ; on obtient le contraste $c_{K\times L}$ défini par :

$$\begin{cases} c_{k\ell} = \dfrac{n_{k\ell}}{\sum_{L'} n_{k\ell}}\, c_k & \text{si } \ell \in L' \\[2ex] c_{k\ell} = 0 \text{ si } \ell \in L - L'. \end{cases}$$

Nous privilégierons ce second point de vue car il présente l'intérêt de faire apparaître l'inertie relative à toutes les comparaisons que l'on peut définir à partir de la description $J = K \times L$ comme l'inertie d'un même protocole x, le protocole de support J. En effet, par rapport à cet univers de référence unique que constitue le croisement K × L, les comparaisons V et V/L' se distinguent clairement (i.e. elles se distinguent en tant que comparaisons remontées sur J).

Le point de vue de la restriction consisterait au contraire à identifier ces deux comparaisons (et en effet en tant que comparaisons sur K, non remontées, elles ne sont pas distinctes) mais à distinguer, relativement à la comparaison V, l'inertie du protocole x de support $K \times L$ et l'inertie du sous-protocole x' de support $K \times L'$.

2° Si on fait $L' = L$ dans l'écriture V/L' on retrouve, sous la forme V/L, la comparaison non-conditionnelle V. Cette forme V/L pourrait être utilisée, si besoin était, pour distinguer la remontée dans $\mathbb{R}_J = \mathbb{R}_{K\times L}$ de la comparaison V, sous-espace de $\mathbb{R}_K$, et ce sous-espace lui-même.

3° Si L' est une partie à un élément : $L' = \{\ell\}$ on retrouve la comparaison V/ℓ envisagée précédemment comme comparaison intra-ℓ et qui apparaît ici comme comparaison conditionnelle (d'où la notation V/ℓ).

On remarquera que la construction de V/ℓ par :

$$V/\ell \;=\{c_K \times \delta_L^\ell : c_K \in V\}$$

est bien identique à la remontée de V sur la partie K/ℓ suivie de l'extension de cette remontée à $K \times L$, car la transition de conditionnement $K \prec K/\ell$ associe à tout $k \in K$ la mesure de Dirac au point (k,ℓ) de $K \times \{\ell\}$.

4° <u>Remontée élémentaire</u>. Généralisons à toute comparaison V/L', où $|L'| \geq 1$, la construction $\{c_K \times \delta_L^\ell : c_K \in V\}$ qui permet de définir V/L' lorsque $L' = \{\ell\}$. On peut en effet définir, à partir de V, une comparaison sur $K \times L$ portée par $K \times L'$, en posant :

$$C = \{c_K \times \delta_L^{L'} : c_K \in V\} \qquad \text{(cf. Annexe, 1ère partie).}$$

c'est-à-dire en associant à tout contraste c_K de V le contraste sur $K \times L$ défini par :

$$c_{k\ell} = c_k \quad \text{si } \ell \in L', \text{ 0 sinon.}$$

Cette comparaison C *n'est pas* (si $|L'| > 1$) la comparaison V/L' définie précédemment comme la remontée de V par la transition $K \prec K \times L'$ (transition de conditionnement de la mesure n_J par la surjection $K \times L' \to K$) ; *sauf* toutefois si la mesure n_J est uniforme sur chaque partie $L' \times \{k\}$; en effet dans ce cas, compte tenu que l'emboîtement $(K \times L') < K >$ est équilibré (les parties $L' \times \{k\}$ ont toutes le même cardinal : $|L'|$), nous savons que la remontée par la transition $K \prec K' \times L$ est équivalente à la remontée que nous avons appelée *élémentaire*, laquelle s'écrit bien :

$$c_K \mapsto c_K \times \delta_L^{L'}.$$

Dans le cas général (mesure n_J quelconque) cette remontée élémentaire est équivalente à la remontée par la transition $K \multimap K \times L'$ qui associe à chaque $k \in K$ la mesure normale uniforme de support $L' \times \{k\}$; autrement dit la remontée élémentaire conduit, pour la ÅSC relative à V, à la solution *équipondérée* liée à la transformation harmonique de la mesure $(n_j)\ j \in K \times L'$ pour l'emboîtement $(K \times L') < K >$.

En conclusion :

On notera V/L' (sans autre indication) la comparaison V remontée sur $K \times L'$ par la transition de conditionnement de la mesure n_J par la projection $K \times L' \to K$ (solution *pondérée*).

On notera encore V/L' mais en précisant qu'il s'agit de la solution *équipondérée* la comparaison V remontée par $K \times L'$ par la procédure élémentaire $c_K \mapsto c_K \times \delta_L^{L'}$.

Les deux solutions coïncident si la mesure n_J est uniforme sur chacune des parties $L' \times \{k\}$, et notamment si le plan (dont K et L sont des facteurs) est équilibré, puisqu'alors la mesure n_J est uniforme sur $K \times L$ tout entier.

5° Symétriquement, étant données une comparaison W sur L et une partie K' de K, on pourra définir les comparaisons W/K' et W/K' *équipondérée*. D'autre part, on établira aisément des relations de décomposition de type inter-intra liées à des croisements partiels $K \times L'$ ou $L' \times K$; par exemple:

$$K' \times L = K' + L(K') = L/K' + K'(L) \text{ ; etc.}$$

4. Condition d'orthogonalité.

1° Revenons aux deux décompositions inter-intra de la comparaison globale sur J :

$$K \times L = K + L(K) = L + K(L)$$

et demandons-nous à quelle condition (si elle existe) les deux comparaisons *inter* liées aux emboîtements $J < K >$ et $J < L >$, i.e. les deux comparaisons K et L, sont *orthogonales* (ou, ce qui est équivalent, à quelle condition toute comparaison sur K est orthogonale à toute comparaison sur L).

On peut se demander aussi à quelle condition K est une sous-comparaison de K à l'intérieur de L, c'est-à-dire de $K(L) = \sum_L K/\ell$ (ou, ce qui est équivalen à quelle condition toute comparaison V sur K (non conditionnelle) est une sous-comparaison de la somme $V(L) = \sum_L V/\ell$) ; ou encore, à quelle condition L est une sous-comparaison de L(K) (i.e. toute comparaison W sur L une sous-comparaison de $W(K) = \sum_K W(k)$).

En fait, ces trois problèmes coïncident car si, par exemple, K est orthogonale à L, alors K est incluse dans la résiduelle de L par rapport à $K \times L$, c'est-à-dire dans K(L) ; et réciproquement, si $K \subset K(L)$, K est orthogonale à la résiduelle de K(L) par rapport à $K \times L$, c'est-à-dire à L.

2° Nous rechercherons d'abord une condition d'orthogonalité : des contraste sur K et des contrastes sur L. Soit c_K et d_L deux contrastes, respectivement sur K et sur L. Leur produit scalaire est égal à :

$$\sum_K \sum_L \frac{c_k}{n_k} \frac{d_\ell}{n_\ell} n_{k\ell}$$

et on voit que si les coefficients $n_{k\ell}$ sont quelconques, ce produit scalair n'est pas nécessairement nul.

Ecrivons le produit scalaire à partir des densités c^K et d^L :

$$\sum_K \sum_L n_{k\ell} c^k d^\ell$$

et soit $f_{K\times L}$, f_K et f_L respectivement les mesures normales associées aux mesures fondamentales $n_{K\times L}$, n_K et n_L. Le produit scalaire de c^K et d^L (ou de c_K et d_L) est nul si et seulement si :

$$\sum_K \sum_L f_{k\ell}\, c^k d^\ell = 0$$

C'est-à-dire si la *moyenne* de l'application-produit $c^K \times d^L = (c^k d^\ell)\ k\ell \in K \times$ est nulle (i.e. si cette application est centrée).

Nous nous placerons donc sous l'hypothèse suivante, équivalente à l'hypothès d'orthogonalité des contrastes sur K et des contrastes sur L :

(1) "Quelles que soient c^K, fonction $K \to \mathbb{R}$ centrée, et d^L, fonction $L \to \mathbb{R}$ centrée, leur produit $c^K \times d^L$ est une fonction centrée", et nous chercherons quelle contrainte en résulte sur la mesure fondamentale $n_{K\times L}$.

Nous remarquerons alors que l'hypothèse (1) est équivalente à la suivante :

(2) "Quelles que soient y^K, fonction $K \to \mathbb{R}$, et z^L, fonction $L \to \mathbb{R}$, la moyenne de leur produit $y^K \times z^L$ est égale au produit de leurs moyennes".

En effet, posons $c^K = (y^k - \bar{y})\ k \in K$, où $\bar{y}$ est la moyenne de y^K

et $d^L = (z^\ell - \bar{z})\ \ell \in L$, où $\bar{z}$ est la moyenne de z^L.

En remplaçant y^k par $c^k + \bar{y}$ et z^ℓ par $d^\ell + \bar{z}$ on vérifie que la moyenne de $y^K \times z^L$ est égale à $\sum_K \sum_L f_{k\ell}\, c^k\, d^\ell + \bar{y} \times \bar{z}$, ce qui établit l'équivalence entre (1) et (2).

Prenons alors $y^K = \delta_k^K$ (fonction indicatrice de k, qui vaut 1 pour k et 0 ailleurs) et $z^L = \delta_\ell^L$.

La moyenne du produit $\delta_k^K \times \delta_\ell^L$ est f_k ; elle est égale par hypothèse au produit de la moyenne de δ_k^K, qui est f_k, et de la moyenne de δ_ℓ^L, qui est f_ℓ ; soit :

$$f_{k\ell} = f_k \times f_\ell$$

cette relation doit être vraie quel que soit $(k,\ell) \in K \times L$, d'où :

$$f_{K\times L} = f_K \times f_L$$

Nous avons établi que si tout contraste sur K est orthogonal à tout contraste sur L la mesure $n_{K\times L}$ est nécessairement la mesure (unique), construite canoniquement à partir des mesures n_K et n_L, telle que la mesure normale associée $f_{K\times L}$ soit le produit des mesures marginales f_K et f_L.

Réciproquement, si $f_{K\times L} = f_K \times f_L$, ce que l'on peut écrire aussi :

$n_{k\ell} = \dfrac{n_k \times n_\ell}{n}$ pour tout $(k,\ell) \in K \times L$, le produit scalaire de deux mesures u et v, sur K et sur L respectivement, est donné par :

$$\frac{1}{n} \left(\sum_K u_k\right)\left(\sum_L v_\ell\right)$$

Donc, il suffit que $\sum u_k = 0$ ou que $\sum v_\ell = 0$ pour que u et v soient orthogonales ; par conséquent, tout contraste sur K est orthogonal à toute *mesure* sur L (donc en particulier à tout contraste sur K) et tout contraste sur L est orthogonal à toute mesure sur K.

3° La condition d'orthogonalité (sous-entendu pour K et L) peut aussi s'écrire : pour tout $k \in K$: $n_{L/k} = n_k \times f_L$ (où $n_{L/k} = (n_{k\ell})_{\ell \in L}$ est la restriction de n_J à la colonne L/k), c'est-à-dire que les mesures $n_{L/k}$ pour k parcourant K, sont proportionnelles entre elles, et proportionnelles à la mesure marginale n_L. De même, symétriquement, les mesures $n_{K/\ell}$ pour ℓ parcourant L sont proportionnelles à la mesure n_K. Comme nous l'avons remarqué, la remontée des comparaisons sur K en des comparaisons sur K/ℓ ($V \to V/\ell$) et des comparaisons sur L en des comparaisons sur L/k ($W \to W/k$) est privilégiée lorsque ces conditions de proportionnalité des mesures fondamentales sur les lignes (K/ℓ) et sur les colonnes (L/k) sont satisfaites. Par contre, la condition d'orthogonalité ($f_{K\times L} = f_K \times f_L$) ne suffit pas à entraîner l'équivalence de la remontée pondérée et de la remontée élémentaire (équipondérée) pour les comparaisons du type V/L' et du type W/K'. Pour que cette équivalence soit assurée (pour toute comparaison V/L' et toute comparaison W/K') il faut que le plan soit équilibré pour K × L (i.e. que la mesure n_J soit uniforme) ; et dans ce cas, bien entendu, la condition d'orthogonalité est aussi satisfaite.

5. <u>Interactions</u>.

1° Supposons d'abord que la condition d'orthogonalité $f_{K\times L} = f_K \times f_L$ soit satisfaite : K est une sous-comparaison de K(L) et L est une sous-comparaison de L(K), donc nous pouvons définir les deux comparaisons résiduelles :

$$K(L) - K \quad \text{et} \quad L(K) - L$$

Or un contraste sur K × L appartient à K(L) - K *ou* à L(K) - L si et seulement s'il est orthogonal à K *et* orthogonal à L ; donc K(L) - K = L(K) - L et cet espace de contrastes est l'intersection de K(L) et de L(K) - i.e. l'intersection des deux comparaisons intra-K maximum et intra-L maximum. Cette caractérisation *ne dépend pas de la mesure* n_J (et, à fortiori, ne dépend pas de la condition d'orthogonalité) ; d'où les définitions suivantes :

2° (1) On appellera *contraste d'interaction* (entre K et L) tout contraste qui est orthogonal à K et à L, ou, ce qui est équivalent, tout contraste qui est à la fois intra-L et intra-K. Donc un contraste $e_{K\times L}$ est un contraste d'interaction si et seulement si ses restrictions sur chaque ligne K/ℓ et sur chaque colonne L/k sont des contrastes, i.e. si :

pour tout $k \in K$: $\sum_L e_{k\ell} = 0$

et pour tout $\ell \in L$: $\sum_K e_{k\ell} = 0$

(2) On appellera *comparaison d'interaction* tout sous-espace de l'espace des contrastes d'interaction. Celui-ci , appelé interaction globale entre K et L , sera noté K.L (ou L.K, la notion d'interaction étant symétrique vis-à-vis de L et K) et on a par définition :

$$K.L = L(K) \cap K(L)$$

Les espaces K et L sont toujours linéairement indépendants car n_J est une mesure strictement positive sur $K \times L$; on désignera leur somme directe par $K \oplus L$ (par $K + L$ dans le cas particulier où K et L sont orthogonales) ; d'où la définition équivalente :

$$K.L = (K \times L) - (K \oplus L)$$

(3) Si (mais seulement si) la condition d'orthogonalité pour K et L est satisfaite, les résiduelles $K(L) - K$ et $L(K) - L$ sont définies, et elles coïncident avec l'interaction globale :

$$K.L = K(L) - K = L(K) - L$$

on a alors :

$$K \oplus L = K + L$$

d'où la décomposition orthogonale de $K \times L$:

$$K \times L = K + L + K.L$$

qui permet d'écrire :

$$K.L = K \times L - (K + L) = K \times L - K - L$$

3° Les relations précédentes conduisent, dans le cas où la condition d'orthogonalité est satisfaite, à divers modes de calculs de la SC relative à K.L fondés sur sa caractérisation comme résiduelle. Dans le cas général (mesure n_J quelconque) il sera toujours aisé de construire une *base* de K.L (pourvu que l'on n'exige pas qu'elle soit orthogonale), puisque, étant donnés un contraste c_K sur K et un contraste d_L sur L, la mesure produit $c_K \times d_L = (c_k \times d_\ell)\ k \in K,\ \ell \in L$ est un contraste d'interaction. Donc, si on se donne une base $\{c_K^p : p \in P\}$ d'une comparaison V sur K à P d.ℓ. et une base $\{d_L^q : q \in Q\}$ d'une comparaison W sur L à Q d. ℓ., l'ensemble

$$\{c_K^p \times d_L^q : p \in P \text{ , } q \in Q\}$$

est une base de la comparaison d'interaction à PQ d. ℓ. que l'on notera V.W. En particulier si P = K − 1 (V = K) et Q = L − 1 (W = L), V.W est l'interaction globale K.L à (K − 1) (L − 1) d. ℓ.

Remarque : si l'un ou l'autre des facteurs K et L ne comportent que deux modalités tout contraste d'interaction est de la forme $c_K \times d_L$. Mais il n'en est plus de même si les deux facteurs ont plus de deux modalités.

Comme contre-exemple, le contraste ci-dessous :

	K		
	1	1	−2
L	−2	1	1
	1	−2	1

est un contraste d'interaction (lié par exemple à une structure de carré latin) mais n'est pas de la forme $c_K \times d_L$, et la comparaison d'interaction à 1 d. ℓ. engendrée par ce contraste n'est pas de la forme V.W.

4° Soit V.W l'interaction entre V, comparaison sur K, et W, comparaison sur L, et soit $V_1 + V_2$ une décomposition orthogonale de V. On définit alors, comme précédemment, les deux interactions $V_1.W$ et $V_2.W$, et la relation :

$$V.W = (V_1 + V_2).\ W = V_1.W + V_2.W$$

s'établit immédiatement. Il y a donc *distributivité* de l'interaction par rapport à l'addition (toujours entendue comme somme directe) de sous-espaces orthogonaux), propriété parallèle à la distributivité de la multiplication des scalaires par rapport à leur addition.

A N N E X E

1ère partie. MESURES SUR UN ENSEMBLE FINI.

1. Soit J un ensemble fini. Nous appellerons *mesure sur* J toute application m de l'ensemble $\mathcal{P}(J)$ des parties de J dans $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels) qui satisfait à la propriété d'*additivité* :

si J' et J'' sont deux parties disjointes de J,
alors $m(J' \cup J'') = m(J') + m(J'')$

et à la condition : $m(\emptyset) = 0$

N.B. Dans le cadre général de la théorie de la mesure, ce que nous appellons ici une mesure sur J (J fini) serait défini comme une mesure sur l'espace mesurable $(J, \mathcal{P}(J))$.

On appelle "masse totale" d'une mesure m la mesure de la partie pleine : m(J).

2. Soit m une mesure sur J. Pour toute partie J' de J, sa mesure est donnée par $m(J') = \sum_{j \in J} m_j$, où m_j désigne la mesure de la partie à un élément $\{j\}$. La mesure $m : \mathcal{P}(J) \to \mathbb{R}$ est ainsi entièrement déterminée par la donnée de l'application $j \mapsto m_j$ de J dans $\mathbb{R}$, que l'on notera comme une famille : $m_J = (m_j)\ j \in J$; il est donc clairement équivalent de définir une "mesure sur J" comme une application numérique sur J : $j \mapsto m_j$ considérée comme *prolongeable à l'ensemble des parties* $\mathcal{P}(J)$ *au moyen de la procédure de sommation :* c'est-à-dire que si $J' \in \mathcal{P}(J)$, $m(J') = \sum_{j \in J} m_j$, avec la convention évidemment naturelle que la mesure de la partie vide $\emptyset$ est égale à 0 : $m(\emptyset) = 0$. Les nombres m_j $(j \in J)$, mesures des parties à un élément, seront appelés les *coefficients* de la mesure, et on pourra identifier la mesure m et la famille m_J.

3. On dit qu'une mesure m_J sur J est *portée* par une partie J° de J si elle est nulle en dehors de cette partie :

$$m_j = 0 \text{ pour tout } j \in J - J°$$

On appelle *support* de la mesure m le minimum (i.e. l'intersection) des parties qui la portent. Donc si J° est le support de J :

$$J° = \{j : j \in J, m_j \neq 0\}$$

La *restriction* d'une mesure m sur J à une partie J° de J est la mesure sur J° qui résulte de la restriction de la famille (m_j) j ∈ J à la famille (m_j) j ∈ J.

L'*extension* à J d'une mesure $m_{J°} = (m_j)$ j ∈ J° sur une partie J° de J est la mesure sur J portée par J° dont la restriction à J° est la mesure $m_{J°}$ i.e. : (m_j) j ∈ J avec $m_j = 0$ pour tout j ∈ J − J°.

On appellera *mesure impropre*, ou (identiquement) *nulle*, la mesure dont tous les coefficients sont égaux à 0.

4. Une mesure m (non impropre) sera dite *positive* (resp. *strictement positive*) si pour tout j ∈ J : $m_j \geq 0$ (resp. $m_j > 0$).

Nous appellerons *mesure normale* toute mesure positive de masse totale 1 : m est une mesure normale si pour tout j ∈ J : $0 \leq m_j \leq 1$, avec $\Sigma\, m_j = 1$.

Etant donné une mesure positive m sur J on peut la normaliser, c'est-à-dire lui associer la mesure normale $(\frac{m_j}{\Sigma\, m_j})$ j ∈ J.

N.B. Au lieu de "normale", d'aucuns disent "normée", mais ce terme est exclu dans tout contexte où l'on a défini sur l'espace des mesures $\mathbb{R}_J$ une norme (autre que la norme $\Sigma\, |u_j|$, par exemple une norme euclidienne) : une mesure normée est alors une mesure de norme 1 et non une mesure positive de masse totale 1.

5. On appelle *mesure de dénombrement* sur J, la mesure notée δ_J qui associe à toute partie J' de J le cardinal de cette partie : $\delta\,(J') = |J'|$. La mesure δ_J est donc définie de manière équivalente par : pour tout j ∈ J : $\delta_j = 1$

Soit J° une partie de J ; on notera $\delta_J^{J°}$ l'extension à J de la mesure de dénombrement sur J°, soit :

$$\delta_j^{J°} = 1 \text{ si } j \in J° \text{ , } 0 \text{ si } j \in J - J°$$

Cas particulier : La mesure notée δ_J^j obtenue en prenant J° = {j} dans $\delta_J^{J°}$ est une mesure normale ponctuelle (de support réduit à 1 élément) appelée "mesure de Dirac" au point j. (La notation δ_J^j pour la mesure de Dirac au point j est compatible avec la notation $\delta^j_{j'}$, appelée "symbole de Kronecker", qui vaut 1 si j' = j , 0 sinon).

6. Soit J et K deux ensembles finis, m une mesure sur J et f une application J → K. On appelle *mesure-image* de la mesure m, par l'application f, la mesure m* sur K définie par :

pour toute partie K' de K : $m^* (K') = m (f^{-1}(K'))$

ou par :

$$m^*_k = m(f^{-1}(k))$$

On dit, ce que la définition ci-dessus rend explicite, que "les applications transportent les mesures".

On appellera *mesure-effectifs* sur un ensemble J toute mesure sur J qui est la mesure-image d'une mesure de dénombrement (sous-entendu : par une application dont l'ensemble d'arrivée est J). Les coefficients d'une mesure-effectifs sont donc des entiers positifs ou nuls.

La mesure normale associée à une mesure-effectifs sera appelée *mesure de fréquence*.

7. On définit la *somme* m de deux mesures m_1 et m_2 sur J :

pour toute partie J' de J : $m(J') = m_1(J') + m_2(J')$

et le *produit* λ m d'une mesure m sur J par un scalaire ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$\lambda\, m = (\lambda\, m_j)\ j \in J$$

Muni de ces deux opérations l'ensemble des mesures sur J, que l'on notera $\mathbb{R}_J$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $|J|$, isomorphe à l'espace des fonctions $J \to \mathbb{R}$.

2ème partie : <u>TRANSITIONS</u>.

1. Nous appelons *transition* d'un ensemble K dans un ensemble J un objet mathématique qui associe à chaque élément k de K une mesure normale sur J. Une transition de K vers J sera notée $t : K \prec J$ ou $t^K_J = (t^k_J)\ k \in K$, où $t^k_J = (t^k_j)\ j \in J$ est la mesure normale sur J associée à k.

Commentaires : La notion de transition de K vers J constitue une généralisation, en un certain sens, de la notion d'application de K vers J. Métaphoriquement la transition apparaît comme une application "diffuse" puisqu'elle associe à chaque $k \in K$, au lieu d'un point (élément de J) une mesure positive de masse 1 sur J ; c'est-à-dire que chaque liaison $k \mapsto j$ possible est affectée d'un coefficient t_j^k compris entre 0 et 1, la somme des coefficients, pour k fixé, étant égale à 1; inversement, une application $K \to J$ peut apparaître comme une transition "concentrée", en ce sens qu'une seule des liaisons possibles $k \mapsto j$ est retenue, pour chaque k. Le lien entre les deux notions apparaîtra clairement si l'on considère le cas particulier des *transitions fonctionnelles* : nous dirons qu'une transition $t : K \prec J$ est fonctionnelle si chacune des mesures t_J^k est concentrée en un point, c'est-à-dire est une mesure de Dirac sur J. On voit alors que la donnée d'une application $f : K \to J$ est *équivalente* à la donnée de la transition fonctionnelle $(\delta_J^{f(k)})\ k \in K$ (famille des mesures de Dirac aux points f(k)).

2. Transitions de conditionnement.

(1) Soit m une mesure positive sur J et J_k une partie de J, de mesure non nulle ($m(J_k) > 0$). La mesure m* sur J définie par :

$$\text{pour toute partie } J' \text{ de } J : m^*(J') = \frac{m(J' \cap J_k)}{m(J_k)} ,$$

ou par :

$$m_j^* = \frac{m_j}{\sum_{J_k} m_j} \quad \text{si } j \in J_k, \text{ et } 0 \text{ sinon,}$$

est une mesure normale portée par J_k que l'on appellera *conditionnement de* m *par la partie* J_k (ou mesure conditionnelle associée à m, pour la partie J_k). On remarquera que m* peut aussi être construite de la manière suivante : on restreint la mesure m à la partie J_k, puis on étend cette restriction à J : d'où la mesure qui a pour coefficients : m_j si $j \in J_k$ et 0 sinon ; m* est alors la mesure normale associée à cette extension sur J de la restriction de m à J_k.

(2) Soit maintenant $(J_k)\ k \in K$ une famille de parties de J, avec $m(J_k) > 0$ pour tout $k \in K$. On appellera *conditionnement de* m *par la famille* $(J_k)\ k \in K$ la famille m_J^K de mesures normales : $(m_J^k)\ k \in K$, où m_J^k est la mesure conditionnelle associée à m pour la partie J_k.

On voit alors que m_J^K est une transition de K vers J, construite à partir de la mesure m par conditionnement. On dira que m_J^K est la *transition de conditionnement de* m par la famille (J_k) indexée par K.

3. Transitions compatibles avec une application.

(1) Considérons le cas particulier où les parties J_k sont deux à deux *disjointes* ; nous noterons alors J(k) la partie de J indexée par k. Les mesures conditionnelles m_J^k $(k \in K)$ sont dans ce cas des mesures à supports disjoints (elles sont portées respecivement par les parties disjointes J(k)).

Or la donnée de la famille de parties disjointes $\{J(k) : k \in K\}$ est équivalente à la donnée d'une application surjective $J° \to K$ (où J° est la réunion de cette famille), à savoir l'application f définie par $f^{-1}(k) = J(k)$ pour tout $k \in K$. On dira que la transition m_J^K est la transition de conditionnement de m *par l'application* (surjective) $f: J° \to K$.

(2) D'une manière générale, on dira qu'une transition $t : K \prec J$ est *compatible* avec une surjection $f : J° \to K$ (où J° est une partie de J) si les mesures t_J^k sont portées respectivement par les parties $f^{-1}(k)$ $(k \in K)$. Une telle transition est déterminée par la donnée de la famille (u_j) $j \in J$ telle que :

$$\begin{cases} u_j = t_j^k & \text{si } j \in J(k) \\ u_j = 0 & \text{si } j \in J - J° \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ROUANET, "L'analyse statistique des données expérimentales - communication au Colloque International DGRST-CNRS" *in Informatique et Sciences Humaines, Actes du Colloque DGRST-CNRS Marseille 11-13 Décembre 1975*, Collection 10/18, Paris, Presses de la Cité, à paraître en 1977.

[2] H. ROUANET, J. ROGALSKI, D. LEPINE, "Algèbre linéaire et la formalisation de la notion de comparaison", *Math. Sci. hum.*, 1968, *24*, 5-16.

[3] D. LEPINE, H. ROUANET, M.O. LEBEAUX, *L'analyse des comparaisons systématiques dans un plan à un facteur aléatoire (structure S < G > * T) : introduction au programme VAR3*, brochure ronéotée, disponible sur demande aux auteurs, Janvier 1976.