

Estimation par projection pour des problèmes inverses sur des espaces de Laguerre et d'Hermite

Ousmane Sacko

Directices de thèse: *Fabienne Comte et Céline Duval*



Soutenance de thèse: 15/11/2021

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Cadre : Les variables d'intérêts ne sont pas directement observées
(problème inverse),

Trois cas spécifiques :

- Estimation des dérivées d'une densité de probabilité,
- Estimation d'une densité à partir d'observations indirectes,
- Déconvolution dans un modèle de régression.

Méthode :

- Estimation par projection en base d'Hermite ou Laguerre,
- Mixte déconvolution-projection.

Pourquoi ces deux bases ?

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Cadre : Les variables d'intérêts ne sont pas directement observées (problème inverse),

Trois cas spécifiques :

- Estimation des dérivées d'une densité de probabilité,
- Estimation d'une densité à partir d'observations indirectes,
- Déconvolution dans un modèle de régression.

Méthode :

- Estimation par projection en base d'Hermite ou Laguerre,
- Mixte déconvolution-projection.

Pourquoi ces deux bases ?

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Cadre : Les variables d'intérêts ne sont pas directement observées (problème inverse),

Trois cas spécifiques :

- Estimation des dérivées d'une densité de probabilité,
- Estimation d'une densité à partir d'observations indirectes,
- Déconvolution dans un modèle de régression.

Méthode :

- Estimation par projection en base d'Hermite ou Laguerre,
- Mixte déconvolution-projection.

Pourquoi ces deux bases ?

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Pourquoi utiliser les bases de Laguerre et d'Hermite ?

- Pas de choix préliminaire du support d'estimation,
- Variables d'intérêt positives : base de Laguerre, Base Hermite : modèles de diffusion,
- Bonnes propriétés mathématiques,
- Faible complexité : petit nombre de coefficients suffit pour avoir une bonne estimation.

Définitions

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Pourquoi utiliser les bases de Laguerre et d'Hermite ?

- Pas de choix préliminaire du support d'estimation,
- Variables d'intérêt positives : base de Laguerre, Base Hermite : modèles de diffusion,
- Bonnes propriétés mathématiques,
- Faible complexité : petit nombre de coefficients suffit pour avoir une bonne estimation.

Définitions

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

On définit la base (orthonormée) de Laguerre $(l_j)_{j \geq 0}$ par :

$$l_j(x) = \sqrt{2}L_j(2x)e^{-x}, \quad L_j(x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}, \quad x \geq 0, \quad j \geq 0,$$

où L_j est le polynôme de Laguerre de degré j qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^+} L_j(x)L_k(x)e^{-x} dx = \delta_{j,k}.$$

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Les fonctions d'Hermite $(h_j)_{j \geq 0}$:

$$h_j(x) = c_j H_j(x) e^{-x^2/2}, \quad c_j = (2^j j! \sqrt{\pi})^{-1/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$H_j(x) = (-1)^j e^{x^2} \frac{d^j}{dx^j} (e^{-x^2}).$$

La famille $(H_j)_{j \geq 0}$:

$$\int_{\mathbb{R}} H_j(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = 2^j j! \sqrt{\pi} \delta_{j,k},$$

Méthode de projection

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Les fonctions d'Hermite $(h_j)_{j \geq 0}$:

$$h_j(x) = c_j H_j(x) e^{-x^2/2}, \quad c_j = (2^j j! \sqrt{\pi})^{-1/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$H_j(x) = (-1)^j e^{x^2} \frac{d^j}{dx^j} (e^{-x^2}).$$

La famille $(H_j)_{j \geq 0}$:

$$\int_{\mathbb{R}} H_j(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = 2^j j! \sqrt{\pi} \delta_{j,k},$$

Méthode de projection

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Estimation par méthode de projection

- ▶ $S_m = \text{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, où φ_j b.o.n sur $\mathbb{L}^2(A)$ où $A \subset \mathbb{R}$.
- ▶ Pour $f \in \mathbb{L}^2(A)$, on développe

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(f) \varphi_j, \quad a_j(f) = \langle f, \varphi_j \rangle = \int_A f(x) \varphi_j(x) dx.$$

La projection orthogonale de f sur S_m est :

$$f_m = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(f) \varphi_j.$$

Ainsi, on estime f par :

$$\hat{f}_m = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{a}_j \varphi_j.$$

Estimation par méthode de projection

- ▶ $S_m = \text{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, où φ_j b.o.n sur $\mathbb{L}^2(A)$ où $A \subset \mathbb{R}$.
- ▶ Pour $f \in \mathbb{L}^2(A)$, on développe

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(f) \varphi_j, \quad a_j(f) = \langle f, \varphi_j \rangle = \int_A f(x) \varphi_j(x) dx.$$

La projection orthogonale de f sur S_m est :

$$f_m = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(f) \varphi_j.$$

Ainsi, on estime f par :

$$\hat{f}_m = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{a}_j \varphi_j.$$

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Les questions sont :

- Vitesse de convergence et **optimalité**,
- **Sélection de modèle** et risque de l'estimateur adaptatif,
- Performance numérique des estimateurs.

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+

Il s'agit d'un travail en collaboration avec F. Comte et C. Duval publié
dans *Mathematical Methods of Statistics*

Observations : X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de densité f , d -fois dérivables.

Hypothèses :

(A1) $f^{(d)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ (cas Laguerre) ou $f^{(d)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (cas Hermite),

(A2) $\|f^{(j)}\|_\infty < +\infty$ pour tout $0 \leq j \leq d-1$,

(A3) $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(j)}(x) = 0$ pour tout $0 \leq j \leq d-1$ (cas Laguerre).

But : Estimer la dérivée d'ordre d de f , notée $f^{(d)}$.

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Observations : X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de densité f , d -fois dérivables.

Hypothèses :

(A1) $f^{(d)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ (cas Laguerre) ou $f^{(d)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (cas Hermite),

(A2) $\|f^{(j)}\|_\infty < +\infty$ pour tout $0 \leq j \leq d-1$,

(A3) $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(j)}(x) = 0$ pour tout $0 \leq j \leq d-1$ (cas Laguerre).

But : Estimer la dérivée d'ordre d de f , notée $f^{(d)}$.

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Définition de l'estimateur

- $S_m = \text{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, avec $\varphi_j = h_j$ (cas Hermite) ou $\varphi_j = l_j$ (cas Laguerre).

Projection orthogonale de $f^{(d)}$ sur S_m :

$$f_{m,(d)} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(f^{(d)})\varphi_j, \quad a_j(f^{(d)}) = \int_{\mathbb{R}} f^{(d)}(x)\varphi_j(x)dx.$$

- Sous **(A1)**, **(A2)** et **(A3)**, on définit :

$$\widehat{f}_{m,(d)} = \sum_{j=0}^{m-1} \widehat{a}_j^{(d)}\varphi_j, \quad \widehat{a}_j^{(d)} = \frac{(-1)^d}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_j^{(d)}(X_i).$$

- Pour $d = 0$, estimateur classique de f .
- Comparaison avec l'approche à noyau où on dérive \widehat{f}_h .

Vitesse de convergence et optimalité ?

Définition de l'estimateur

- $S_m = \text{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, avec $\varphi_j = h_j$ (cas Hermite) ou $\varphi_j = l_j$ (cas Laguerre).

Projection orthogonale de $f^{(d)}$ sur S_m :

$$f_{m,(d)} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(f^{(d)})\varphi_j, \quad a_j(f^{(d)}) = \int_{\mathbb{R}} f^{(d)}(x)\varphi_j(x)dx.$$

- Sous **(A1)**, **(A2)** et **(A3)**, on définit :

$$\widehat{f}_{m,(d)} = \sum_{j=0}^{m-1} \widehat{a}_j^{(d)}\varphi_j, \quad \widehat{a}_j^{(d)} = \frac{(-1)^d}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_j^{(d)}(X_i).$$

- Pour $d = 0$, estimateur classique de f .
- Comparaison avec l'approche à noyau où on dérive \widehat{f}_h .

Vitesse de convergence et optimalité ?

Définition de l'estimateur

- $S_m = \text{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, avec $\varphi_j = h_j$ (cas Hermite) ou $\varphi_j = l_j$ (cas Laguerre).

Projection orthogonale de $f^{(d)}$ sur S_m :

$$f_{m,(d)} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(f^{(d)})\varphi_j, \quad a_j(f^{(d)}) = \int_{\mathbb{R}} f^{(d)}(x)\varphi_j(x)dx.$$

- Sous **(A1)**, **(A2)** et **(A3)**, on définit :

$$\widehat{f}_{m,(d)} = \sum_{j=0}^{m-1} \widehat{a}_j^{(d)}\varphi_j, \quad \widehat{a}_j^{(d)} = \frac{(-1)^d}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_j^{(d)}(X_i).$$

- Pour $d = 0$, estimateur classique de f .
- Comparaison avec l'approche à noyau où on dérive \widehat{f}_h .

Vitesse de convergence et optimalité ?

Définissons $W^s(D)$ (voir Bongioanni and Torrea (2006)) par :

$$W^s(D) = \left\{ \theta \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \sum_{k \geq 0} k^s a_k^2(\theta) \leq D \right\}, \quad D > 0,$$

où $a_k(\theta) = \int \theta(x) \varphi_k(x) dx$ et

- $W^s(D) = W_H^s(D)$ pour le cas Hermite,
- $W^s(D) = W_L^s(D)$ pour le cas Laguerre.

Vitesse de convergence

Théorème

Supposons **(A1)**-**(A2)**-**(A3)** et

$$\mathbb{E}[X_1^{-d-1/2}] < +\infty \text{ (Laguerre) ou } \mathbb{E}[|X_1|^{2/3}] < +\infty \text{ (Hermite)}.$$

Alors, pour $m_{opt} = \lfloor n^{(2/2s+1)} \rfloor$, on a :

$$\sup_{f \in W^s(D)} \mathbb{E} [\| \hat{f}_{m_{opt},(d)} - f^{(d)} \|^2] \leq C(s, d, D) n^{-\frac{2(s-d)}{2s+1}}.$$

- Même vitesse que Rao (1996), Schmisser (2013) pour le cas dépendant.
- m_{opt} ne dépend pas de d . Même que Lepski (2018)
- Meilleure lorsque s croît, se dégrade lorsque d croit.
- $\hat{f}_{m_{opt},(d)}$ minimax optimal pour $f \in W^s(D)$.

m_{opt} n'est pas accessible ? Que faire ?

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Vitesse de convergence

Théorème

Supposons **(A1)**-**(A2)**-**(A3)** et

$$\mathbb{E}[X_1^{-d-1/2}] < +\infty \text{ (Laguerre) ou } \mathbb{E}[|X_1|^{2/3}] < +\infty \text{ (Hermite)}.$$

Alors, pour $m_{opt} = \lfloor n^{(2/2s+1)} \rfloor$, on a :

$$\sup_{f \in W^s(D)} \mathbb{E} [\|\widehat{f}_{m_{opt},(d)} - f^{(d)}\|^2] \leq C(s, d, D) n^{-\frac{2(s-d)}{2s+1}}.$$

- Même vitesse que Rao (1996), Schmisser (2013) pour le cas dépendant.
- m_{opt} **ne dépend pas de d** . Même que Lepski (2018)
- Meilleure lorsque s croît, se dégrade lorsque d croit.
- $\widehat{f}_{m_{opt},(d)}$ minimax optimal pour $f \in W^s(D)$.

m_{opt} n'est pas accessible ? Que faire ?

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Vitesse de convergence

Théorème

Supposons **(A1)**-**(A2)**-**(A3)** et

$$\mathbb{E}[X_1^{-d-1/2}] < +\infty \text{ (Laguerre) ou } \mathbb{E}[|X_1|^{2/3}] < +\infty \text{ (Hermite)}.$$

Alors, pour $m_{opt} = \lfloor n^{(2/2s+1)} \rfloor$, on a :

$$\sup_{f \in W^s(D)} \mathbb{E} [\|\widehat{f}_{m_{opt},(d)} - f^{(d)}\|^2] \leq C(s, d, D) n^{-\frac{2(s-d)}{2s+1}}.$$

- Même vitesse que Rao (1996), Schmisser (2013) pour le cas dépendant.
- m_{opt} **ne dépend pas de d** . Même que Lepski (2018)
- Meilleure lorsque s croît, se dégrade lorsque d croit.
- $\widehat{f}_{m_{opt},(d)}$ minimax optimal pour $f \in W^s(D)$.

m_{opt} n'est pas accessible ? Que faire ?

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

But : Proposer un choix *automatique* de m , tel que :

$$\mathbb{E}[\|\widehat{f}_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2] = \|f_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{m-1} \text{Var}[\varphi_j^{(d)}(X_1)]$$

minimal.

- ▶ $\|f_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2 = \|f^{(d)}\|^2 - \|f_{m,(d)}\|^2$
- ▶ Posons $V_{m,d} = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}[(\varphi_j^{(d)}(X_1))^2]$

On pose :

$$\widehat{m}_n := \underset{m \in \mathcal{M}_{n,d}}{\text{argmin}} \left\{ -\|\widehat{f}_{m,(d)}\|^2 + \widehat{\text{pen}}_d(m) \right\}, \quad \widehat{\text{pen}}_d(m) = \kappa \frac{\widehat{V}_{m,d}}{n},$$

où $\widehat{V}_{m,d} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (\varphi_j^{(d)}(X_i))^2$, $\kappa > 0$ doit être calibré et $\mathcal{M}_{n,d}$ une collection finie de modèles.

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

But : Proposer un choix *automatique* de m , tel que :

$$\mathbb{E}[\|\widehat{f}_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2] = \|f_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{m-1} \text{Var}[\varphi_j^{(d)}(X_1)]$$

minimal.

- ▶ $\|f_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2 = \|f^{(d)}\|^2 - \|f_{m,(d)}\|^2$
- ▶ Posons $V_{m,d} = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}[(\varphi_j^{(d)}(X_1))^2]$

On pose :

$$\widehat{m}_n := \underset{m \in \mathcal{M}_{n,d}}{\text{argmin}} \left\{ -\|\widehat{f}_{m,(d)}\|^2 + \widehat{\text{pen}}_d(m) \right\}, \quad \widehat{\text{pen}}_d(m) = \kappa \frac{\widehat{V}_{m,d}}{n},$$

où $\widehat{V}_{m,d} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (\varphi_j^{(d)}(X_i))^2$, $\kappa > 0$ doit être calibré et $\mathcal{M}_{n,d}$ une collection finie de modèles.

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Théorème (inégalité oracle)

Soit $\mathcal{M}_{n,d} := \{d, \dots, m_n(d)\}$, où $m_n(d) \geq d$. Supposons **(A1)**, **(A2)**, $\|f\|_\infty < +\infty$, et que **(A3)** (Laguerre).

AL. $m_n(d) = \lfloor (n/\log^3(n))^{\frac{2}{2d+1}} \rfloor$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{f(x)}{x^d} < +\infty$ (Laguerre),

AH. $m_n(d) = \lfloor n^{\frac{2}{2d+1}} \rfloor$ (Hermite).

Alors, pour tout $\kappa \geq \kappa_0 := 32$

$$\mathbb{E} \left[\|\widehat{f}_{\widehat{m}_n, (d)} - f^{(d)}\|^2 \right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}_{n,d}} \left(\|f_{m, (d)} - f^{(d)}\|^2 + \text{pen}_d(m) \right) + \frac{C'}{n},$$

où $\text{pen}_d(m) = \kappa \frac{V_{m,d}}{n}$.

Outils : Inégalités de Talagrand (1999) et de Bernstein.

Illustration numérique

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Théorème (inégalité oracle)

Soit $\mathcal{M}_{n,d} := \{d, \dots, m_n(d)\}$, où $m_n(d) \geq d$. Supposons **(A1)**, **(A2)**, $\|f\|_\infty < +\infty$, et que **(A3)** (Laguerre).

AL. $m_n(d) = \lfloor (n/\log^3(n))^{\frac{2}{2d+1}} \rfloor$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{f(x)}{x^d} < +\infty$ (Laguerre),

AH. $m_n(d) = \lfloor n^{\frac{2}{2d+1}} \rfloor$ (Hermite).

Alors, pour tout $\kappa \geq \kappa_0 := 32$

$$\mathbb{E} \left[\|\widehat{f}_{\widehat{m}_n(d)} - f^{(d)}\|^2 \right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}_{n,d}} \left(\|f_{m,(d)} - f^{(d)}\|^2 + \text{pen}_d(m) \right) + \frac{C'}{n},$$

où $\text{pen}_d(m) = \kappa \frac{V_{m,d}}{n}$.

Outils : Inégalités de Talagrand (1999) et de Bernstein.

Illustration numérique

Théorème (inégalité oracle)

Soit $\mathcal{M}_{n,d} := \{d, \dots, m_n(d)\}$, où $m_n(d) \geq d$. Supposons **(A1)**, **(A2)**, $\|f\|_\infty < +\infty$, et que **(A3)** (Laguerre).

AL. $m_n(d) = \lfloor (n/\log^3(n))^{\frac{2}{2d+1}} \rfloor$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{f(x)}{x^d} < +\infty$ (Laguerre),

AH. $m_n(d) = \lfloor n^{\frac{2}{2d+1}} \rfloor$ (Hermite).

Alors, pour tout $\kappa \geq \kappa_0 := 32$

$$\mathbb{E} \left[\|\widehat{f}_{\widehat{m}_n, (d)} - f^{(d)}\|^2 \right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}_{n,d}} \left(\|f_{m, (d)} - f^{(d)}\|^2 + \text{pen}_d(m) \right) + \frac{C'}{n},$$

où $\text{pen}_d(m) = \kappa \frac{V_{m,d}}{n}$.

Outils : Inégalités de Talagrand (1999) et de Bernstein.

Illustration numérique

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivéesBorne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Illustration

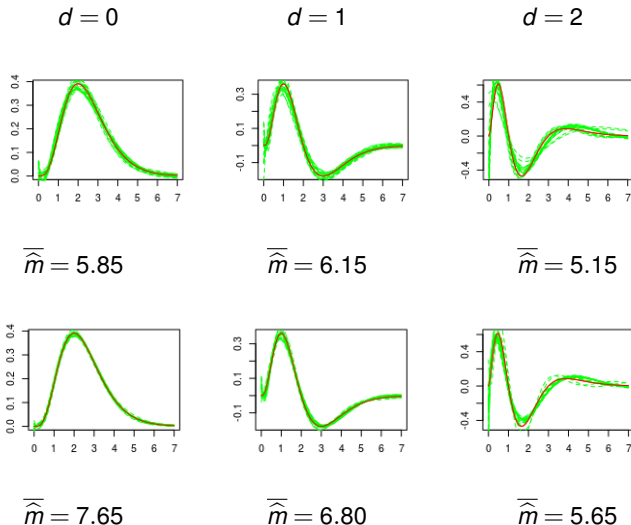


FIGURE – 20 estimés $\widehat{f}_{\widehat{m}_n, (d)}$ en base de Laguerre, avec $n = 500$ (1ère ligne), et $n = 2000$ (2 è ligne). Vraie trait continu (rouge) et les estimés en pointillés.

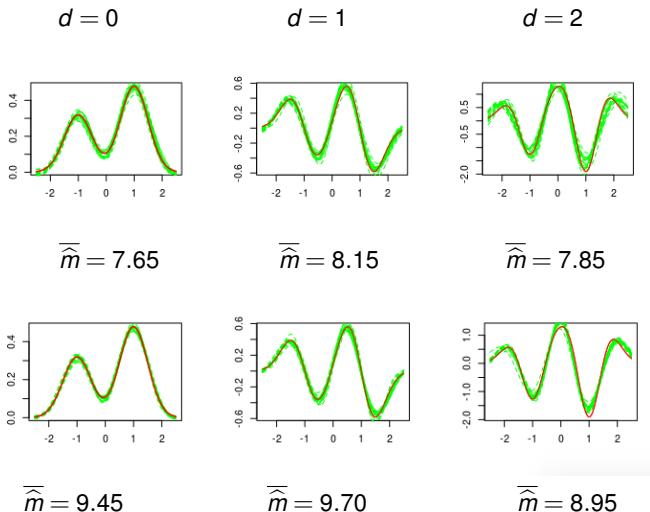


FIGURE – 20 estimés $\widehat{f}_{\widehat{m}_{n,(d)}}$ en base d'Hermite, avec $n = 500$ (1ère ligne) et $n = 2000$ (seconde ligne). Vraie en rouge, estimés en pointillés.

- Estimateur par projection, simple à implémenter, stable numériquement.
- Description parcimonieuse de la fonction à estimer.
- Résultat non asymptotique, minimax et adaptatif avec une pénalité indépendante de la base.

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Il s'agit d'un travail publié dans ALEA

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Modèle et Hypothèses

Modèle :

$$Z_k = X_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, n$$

- (A1) les $(X_k)_{k \geq 1}$ sont i.i.d. de densité inconnue f ,
- (A2) les $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. de densité connue f_ε ,
- (A3) les $(X_k)_{k \geq 1}$ et $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ sont indépendantes

Soit f_Z la densité de Z_1 : il vient d'après (A3) que $f_Z = f * f_\varepsilon$.

Hypothèse sur la loi du bruit :

- (A4) $\exists c'_1 \geq c_1 > 0$, et $\gamma \geq 0, \mu \geq 0, \delta \geq 0$

$$c'_1(1+t^2)^\gamma e^{\mu|t|^\delta} \leq |f_\varepsilon^*(t)|^{-2} \leq c_1(1+t^2)^\gamma e^{\mu|t|^\delta},$$

où $t^*(u) = \int e^{iux} t(x) dx$ est la transformée de Fourier de t .

Question : Comment estimer f à partir de Z_1, \dots, Z_n ?

Modèle et Hypothèses

Modèle :

$$Z_k = X_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, n$$

- (A1) les $(X_k)_{k \geq 1}$ sont i.i.d. de densité inconnue f ,
- (A2) les $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. de densité connue f_ε ,
- (A3) les $(X_k)_{k \geq 1}$ et $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ sont indépendantes

Soit f_Z la densité de Z_1 : il vient d'après (A3) que $f_Z = f * f_\varepsilon$.

Hypothèse sur la loi du bruit :

- (A4) $\exists c'_1 \geq c_1 > 0$, et $\gamma \geq 0, \mu \geq 0, \delta \geq 0$

$$c'_1(1+t^2)^\gamma e^{\mu|t|^\delta} \leq |f_\varepsilon^*(t)|^{-2} \leq c_1(1+t^2)^\gamma e^{\mu|t|^\delta},$$

où $t^*(u) = \int e^{iux} t(x) dx$ est la transformée de Fourier de t .

Question : Comment estimer f à partir de Z_1, \dots, Z_n ?

Modèle et Hypothèses

Modèle :

$$Z_k = X_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, n$$

- (A1) les $(X_k)_{k \geq 1}$ sont i.i.d. de densité inconnue f ,
- (A2) les $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. de densité connue f_ε ,
- (A3) les $(X_k)_{k \geq 1}$ et $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ sont indépendantes

Soit f_Z la densité de Z_1 : il vient d'après (A3) que $f_Z = f * f_\varepsilon$.

Hypothèse sur la loi du bruit :

- (A4) $\exists c'_1 \geq c_1 > 0$, et $\gamma \geq 0, \mu \geq 0, \delta \geq 0$

$$c'_1(1+t^2)^\gamma e^{\mu|t|^\delta} \leq |f_\varepsilon^*(t)|^{-2} \leq c_1(1+t^2)^\gamma e^{\mu|t|^\delta},$$

où $t^*(u) = \int e^{iux} t(x) dx$ est la transformée de Fourier de t .

Question : Comment estimer f à partir de Z_1, \dots, Z_n ?

Approche par projection

- ▶ $S_m := \text{Vect}(\varphi_j)_{0 \leq j \leq m-1}$, où φ_j base d'Hermite.
- ▶ Rappelons que $\varphi_j^* = \sqrt{2\pi}(i)^j \varphi_j$

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Estimateur :

$$\hat{f}_m = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{a}_j \varphi_j, \quad \hat{a}_j = \frac{(-i)^j}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\hat{f}_Z^*(t)}{\hat{f}_\varepsilon^*(t)} \varphi_j(t) dt,$$

où

$$\hat{f}_Z^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{itZ_k}.$$

Peut-on atteindre les vitesses classiques ?

Approche par projection

- ▶ $S_m := \text{Vect}(\varphi_j)_{0 \leq j \leq m-1}$, où φ_j base d'Hermite.
- ▶ Rappelons que $\varphi_j^* = \sqrt{2\pi}(i)^j \varphi_j$

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Estimateur :

$$\hat{f}_m = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{a}_j \varphi_j, \quad \hat{a}_j = \frac{(-i)^j}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\hat{f}_Z^*(t)}{f_\varepsilon^*(t)} \varphi_j(t) dt,$$

où

$$\hat{f}_Z^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{itZ_k}.$$

Peut-on atteindre les vitesses classiques ?

Vitesse de l'estimateur ?

Hypothèse additionnelle :

(A5) $f_Z = f \star f_\varepsilon$ est borné.

Pour $f \in W_H^s(D)$ (boule de Sobolev-Hermite) :

$$\mathbb{E}[\|\widehat{f}_m - f\|^2] \leq D m^{-s} + C \frac{m^{\gamma + \frac{1-\delta}{2}} e^{ul\delta/2} m^{\delta/2}}{n} + \frac{c}{n}, \quad C, c > 0, \quad l \geq 2,$$

Ainsi,

$\delta = 0$	$0 < \delta < 2$ or $\delta = 2, \mu < \xi$
m_{opt}	$\left[n^{\frac{2}{2s+2\gamma+1}} \left[\left(\frac{\log n}{2\mu l^\delta} \right)^{\frac{2}{\delta}} \right] \right]$
Vitesse	$n^{-\frac{2s}{2s+2\gamma+1}} (\log n)^{-\frac{2s}{\delta}}$

TABLE – Vitesse de convergence de \widehat{f}_m pour $f \in W_H^s(D)$.

- Vitesses optimales, Fan (1993), Pensky et Vidakovic(1999).

Collection de modèles

$$\mathcal{M}_n = \{m \in \mathbb{N}, \quad \Delta(m) \leq n\},$$

où

$$\Delta(m) = \frac{1}{\pi} \int_{|u| \leq \sqrt{m}} |f_\varepsilon^*(u)|^{-2} du \asymp m^{\gamma + \frac{1-\delta}{2}} e^{u l^{\delta/2} m^{\delta/2}},$$

cf Comte and Lacour (2011). On sélectionne m :

$$\hat{m} = \arg \min_{m \in \mathcal{M}_n} \{-\|\hat{f}_m\|^2 + \text{pen}(m)\},$$

$$\text{pen}(m) = \begin{cases} \kappa \frac{\Delta(m)}{n}, & \text{si } \delta < \frac{1}{2}, \\ 2\kappa \left(1 + 24\mu l^{\delta/2} m^{\delta - \frac{1}{2}}\right) \frac{\Delta(m)}{n} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \delta \leq 2, \end{cases}$$

où κ est une constante qui doit être calibrée.

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Théorème (Inégalité oracle)

Supposons **(A1)**, ..., **(A5)** vérifiées et f_ε de carré intégrable. Alors, il existe une constante κ_0 , telle que $\forall \kappa \geq \kappa_0 = 17$, l'estimateur $\widehat{f}_{\widehat{m}}$ satisfait

$$\mathbb{E} \left[\|\widehat{f}_{\widehat{m}} - f\|^2 \right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}_n} (\|f - f_m\|^2 + \text{pen}(m)) + \frac{C'}{n},$$

où C est une constante ($C=4$ convient) et C' une constante qui dépend de f_ε .

Outil : Inégalité de Talagrand (1999)

Théorème (Inégalité oracle)

Supposons **(A1)**, ..., **(A5)** vérifiées et f_ε de carré intégrable. Alors, il existe une constante κ_0 , telle que $\forall \kappa \geq \kappa_0 = 17$, l'estimateur $\widehat{f}_{\widehat{m}}$ satisfait

$$\mathbb{E} \left[\|\widehat{f}_{\widehat{m}} - f\|^2 \right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}_n} (\|f - f_m\|^2 + \text{pen}(m)) + \frac{C'}{n},$$

où C est une constante ($C=4$ convient) et C' une constante qui dépend de f_ε .

Outil : Inégalité de Talagrand (1999)

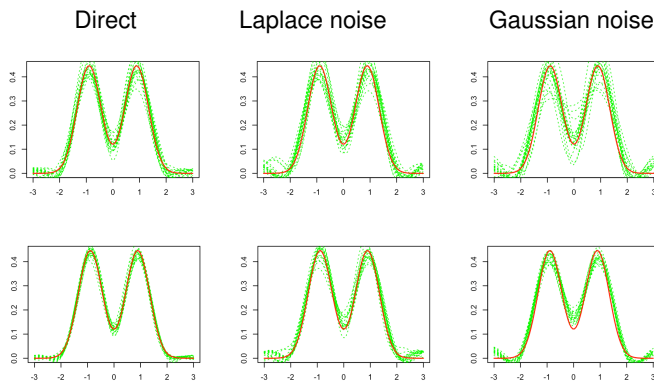


FIGURE – 20 estimés d'une $(0.5\mathcal{N}(-2, 1) + 0.5\mathcal{N}(2, 1))/\sqrt{5}$, avec $n = 250$ (1 ère ligne) et $n = 1000$ (2e ligne). Vraie densité en trait continu (rouge) et estimés en pointillés (vert).

Déconvolution dans un modèle de régression en base d'Hermite

"Il s'agit d'un travail en cours"

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Modèle de convolution :

$$y(x_k) = h(x_k) + \varepsilon_k, \quad k = -n, \dots, n-1,$$

où

$$h(x) = f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

- fonction g : *noyau* est supposée connue,
- $(x_k = kT/n)_{-n \leq k \leq n-1}$ où $0 < T < \infty$ est fixé,
- $(\varepsilon_k)_{-n \leq k \leq n-1}$ i.i.d. avec $\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$ et $\text{Var}(\varepsilon_k) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, connu,
- f est la fonction inconnue que l'on désire reconstruire sur \mathbb{R} .

Cas particulier

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Modèle de convolution :

$$y(x_k) = h(x_k) + \varepsilon_k, \quad k = -n, \dots, n-1,$$

où

$$h(x) = f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

- fonction g : *noyau* est supposée connue,
- $(x_k = kT/n)_{-n \leq k \leq n-1}$ où $0 < T < \infty$ est fixé,
- $(\varepsilon_k)_{-n \leq k \leq n-1}$ i.i.d. avec $\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$ et $\text{Var}(\varepsilon_k) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, connu,
- f est la fonction inconnue que l'on désire reconstruire sur \mathbb{R} .

Cas particulier

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Modèle de convolution :

$$y(x_k) = h(x_k) + \varepsilon_k, \quad k = -n, \dots, n-1,$$

où

$$h(x) = f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

- fonction g : *noyau* est supposée connue,
- $(x_k = kT/n)_{-n \leq k \leq n-1}$ où $0 < T < \infty$ est fixé,
- $(\varepsilon_k)_{-n \leq k \leq n-1}$ i.i.d. avec $\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$ et $\text{Var}(\varepsilon_k) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, connu,
- f est la fonction inconnue que l'on désire reconstruire sur \mathbb{R} .

Cas particulier

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Si $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) \subset [0, +\infty[$:

- Dey et al. (1998) : pour $g(x) = be^{-ax} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ et en utilisant une équation différentielle linéaire.
- Abramovich et al. (2013) résumant le problème à l'estimation de $h^{(d)}$ avec une méthode à noyau.
- Comte et al. (2017) : un estimateur par projection, fondé sur un développement des fonctions f, g et h en base de Laguerre.

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Comment estimer f lorsque f et g ne sont pas
nécessairement nulles sur \mathbb{R}^- ?

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Hypothèses

(A1) f et f^* sont dans $L^1(\mathbb{R})$.

(A2) $g^* \neq 0$.

(A3) Il existe $c_1 \geq c'_1 > 0$, tels que

$$c'_1(1+t^2)^\gamma \leq |g^*(t)|^{-2} \leq c_1(1+t^2)^\gamma, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sous (A1), (A2), nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \frac{h^*(u)}{g^*(u)} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On obtient un estimateur de f en remplaçant h par un estimateur.

Comment ?

Hypothèses

- (A1) f et f^* sont dans $L^1(\mathbb{R})$.
- (A2) $g^* \neq 0$.
- (A3) Il existe $c_1 \geq c'_1 > 0$, tels que

$$c'_1(1+t^2)^{\gamma} \leq |g^*(t)|^{-2} \leq c_1(1+t^2)^{\gamma}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sous (A1), (A2), nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \frac{h^*(u)}{g^*(u)} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On obtient un estimateur de f en remplaçant h par un estimateur.

Comment ?

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Les approches ?

Nous présentons 2 méthodes d'estimation :

- "Fourier-Hermite approach",
- "Hermite-Hermite approach"

Etape 1 : Problème de régression en "fixed design" en base d'Hermite.

$$y(x_k) = h(x_k) + \varepsilon_k, \quad k = -n, \dots, n-1,$$

Les approches ?

Nous présentons 2 méthodes d'estimation :

- "Fourier-Hermite approach",
- "Hermite-Hermite approach"

Etape 1 : Problème de régression en "fixed design" en base d'Hermite.

$$y(x_k) = h(x_k) + \varepsilon_k, \quad k = -n, \dots, n-1,$$

Estimateur de moindres carrés de h

$S_d := \text{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{d-1}\}$ où φ_j est la base d'Hermite.

On introduit les matrices :

$$\Phi_d = (\varphi_j(x_i))_{-n \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq d-1}, \quad \Psi_d = \frac{T}{n} \Phi_d^t \Phi_d,$$

où Φ_d^t est la transposée de Φ_d . Par la méthode des moindres carrés :

$$\widehat{h}_d = \sum_{j=0}^{d-1} \widehat{b}_j^{(d)} \varphi_j,$$

$$\vec{\widehat{b}}^{(d)} = (\widehat{b}_0^{(d)}, \dots, \widehat{b}_{d-1}^{(d)})^t = (\Phi_d^t \Phi_d)^{-1} \Phi_d^t \vec{y} = \frac{T}{n} \Psi_d^{-1} \Phi_d^t \vec{y},$$

$$\vec{y} = (y(x_{-n}), \dots, y(x_{n-1}))^t.$$

Notons pour $n \geq d$, Ψ_d est inversible.

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Procédure d'estimation pour f :

Etape 2 :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \frac{h^*(u)}{g^*(u)} du, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Estimateur :

$$\widehat{f}_{(\ell),d}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-iux} \frac{\widehat{h}_d^*(u)}{g^*(u)} du, \quad \forall \ell > 0.$$

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Théorème

Supposons que $h \in W_H^{s+\gamma}(L')$. Sous **(A1)** à **(A4)**, nous avons pour $d_{opt} = \lceil n^{1/(s+\gamma+1)} \rceil$ avec $s + \gamma > 11/6$ et $\ell_{opt} \propto n^{1/2(s+\gamma+1)}$ que

$$\sup_{f \in W^s(L)} \mathbb{E} \left[\|\widehat{f}_{(\ell_{opt}),d_{opt}} - f\|^2 \right] = \mathcal{O} \left(n^{-\frac{s}{s+\gamma+1}} \right),$$

où $W^s(L)$ boule de Sobolev classique de régularité s et γ est donné en **(A3)**.

Adaptation pour $\widehat{f}_{(\ell),d}$ avec la méthode GL

On pose $\ell = \sqrt{2d}$.

$$\widetilde{f}_d(x) := \widehat{f}_{(\sqrt{2d}),d}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2d}}^{\sqrt{2d}} e^{-iux} \frac{\widehat{h}_d^*(u)}{g^*(u)} du.$$

On estime le biais par :

$$\widehat{A}(d) := \max_{d' \in \mathcal{M}_n^{(1)}} \left\{ \left(\|\widetilde{f}_{d'} - \widetilde{f}_{d \wedge d'}\|^2 - \kappa_1 V(d') \right)_+ \right\}, \quad \kappa_1 > 0$$

$$V(d) = 2(1 + 24 \log(n)) \sigma_\varepsilon^2 \Delta(\sqrt{2d}) \frac{\lambda_2 d T}{n}.$$

On sélectionne \widehat{d} :

$$\widehat{d} := \arg \min_{d \in \mathcal{M}_n^{(1)}} \left\{ \widehat{A}(d) + \kappa_2 V(d) \right\},$$

où $\kappa_1 \leq \kappa_2$ et $\mathcal{M}_n^{(1)}$ une collection finie de modèles.

κ_1 et κ_2 doivent être calibrés ! Mais comment ?

Théorème

Sous **(A1)** à **(A4)** et ε sous-gaussien, pour $\kappa_1 \geq 12$,

$$\mathbb{E}[\|\tilde{f}_d - f\|^2] \leq C \inf_{d \in \mathcal{M}_n^{(1)}} \left(\|f - f_{(\sqrt{2d})}\|^2 + R_b(d) + V(d) \right) + C' \frac{\log(n)}{n},$$

où $R_b(d) := \max_{d' \in \mathcal{M}_n^{(1)}, d \leq d'} \left(\Delta(\sqrt{2d'}) \|h - \mathbb{E}[\hat{h}_{d'}]\|^2 \right)$,

$f_{(\ell)}^* = f^* \mathbf{1}_{[-\ell, \ell]}$, C est constante numérique. De plus, si $f \in W^s(L)$ et $h \in W_H^{s+\gamma}(L')$ avec $s + \gamma \geq 17/6$,

$$\mathbb{E}[\|\tilde{f}_d - f\|^2] \leq C_1 \inf_{d \in \mathcal{M}_n^{(1)}} (d^{-s} + V(d)) + C'_1 \frac{\log(n)}{n},$$

où C_1 dépend de C, L, L', s, γ et C'_1 dépend de C', s et γ .

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivéesBorne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

- Fonctions test :
 - (i) $f(x) = \exp(-2x^2)$, $I = [-2, 2]$,
 - (ii) $f(x) = x^2 \exp(-x) 1_{x \geq 0}$, $I = [0, 6]$
 - (iii) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} (0.4 \exp(-8(x+1)^2) + 0.6 \exp(-8(x-1)^2))$,
 $I = [-2, 2]$,
 - (vi) $f(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$, $I = [-2, 2]$
- $g(x) = \theta^2 x \exp(-\theta x) 1_{x \geq 0}$ avec $\theta = 4$.
- $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\sigma_\varepsilon = 1/8$.
- $T = 10$, $n \in \{250, 500, 1000\}$.
- $\kappa_1 = 1.5 \times 10^{-3}$ et $\kappa_2 = 2\kappa_1$.
- $\mathcal{M}_n^{(1)} = \{1, 2, \dots, 25\}$.

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivéesBorne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

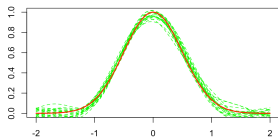
Étude numérique

Perspectives

Perspectives

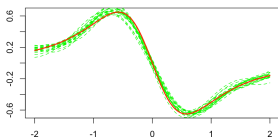
Références

(i)



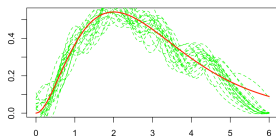
$$\widehat{d} = 8, \overline{s2n} = 2.34, s \rightarrow \infty$$

(iii)



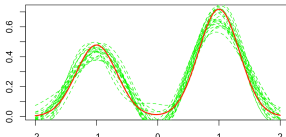
$$\widehat{d} = 11.35, \overline{s2n} = 1.94, s \rightarrow \infty$$

(ii)



$$\widehat{d} = 17.7, \overline{s2n} = 2.23, s = 2$$

(iv)



$$\widehat{d} = 12.85, \overline{s2n} = 1.03, s \rightarrow \infty$$

FIGURE – Collection d'estimateurs de \widetilde{f}_d , la vraie fonction en trait épais (rouge), la courbe des estimées en vert pointillés pour $n = 500$.

Conclusions

- Trois pb inverses étudiés
- Bases Laguerre et Hermite \Rightarrow estimateurs minimax optimaux
- Adaptatifs
- Faciles à implémenter
- Calculs rapides

- ▶ Estimation optimale et adaptative des dérivées d'une densité.
 - Risque de l'estimateur adaptatif pour le cas noyau avec la méthode PCO.
 - Est-il possible d'étendre les résultats au cas des variables dépendantes ?
- ▶ Déconvolution d'une densité sur \mathbb{R} en base d'Hermite.
 - Est-il possible d'utiliser la base Hermite pour $f_{\mathcal{E}}$ inconnue ?
 - Étudier la procédure pour des réalisations dépendantes ?
- ▶ Régression et déconvolution en base d'Hermite
 - Problème d'optimalité ?
 - Étendre les résultats pour des x_k **aléatoires** ?
 - Extension en dimension $d \geq 2$?

Introduction

Estimation adaptative et optimale des dérivées d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des dérivées

Borne du risque et vitesse de convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une densité en base d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et Déconvolution en base d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Introduction

Estimation adaptative et
optimale des dérivées
d'une densité

Modèle et Hypothèses

Estimateur par projection des
dérivées

Borne du risque et vitesse de
convergence

Procédure adaptative

Étude numérique

Déconvolution d'une
densité en base
d'Hermite

Modèle

Définition de l'estimateur

Borne du risque

Procédure adaptative

Illustration numérique

Régression et
Déconvolution en base
d'Hermite

Contexte

Régression en base d'Hermite

La stratégie «Fourier-Hermite»

Étude numérique

Perspectives

Perspectives

Références

Merci de votre attention !



R. Askey and S. Wainger.

Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series.

Amer. J. Math., 87 :695–708, 1965.



Y. Baraud.

Model selection for regression on a fixed design.

Probab. Theory Related Fields, 117(4) :467–493, 2000.



B. Bongioanni and J. L. Torrea.

Sobolev spaces associated to the harmonic oscillator.

Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 116(3) :337–360, 2006.



C. Butucea.

Deconvolution of supersmooth densities with smooth noise.

Canad. J. Statist., 32(2) :181–192, 2004.



Fabienne Comte, Charles-A. Cuenod, Marianna Pensky, and Yves Rozenholc.

Laplace deconvolution on the basis of time domain data and its application to dynamic contrast-enhanced imaging.

J. R. Stat. Soc. Ser. B. Stat. Methodol., 79(1) :69–94, 2017.